Esame Scritto di Fisica Moderna
Traccia di soluzione

17 Febbraio 2017

1. Le equazioni del moto di Heisenberg per mgli operatori dati sono

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,x] = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2m},x\right] = \frac{i}{2m\hbar}(p[p,x]+[p,x]p) = \frac{p}{m} \tag{1}$$
$$\frac{dp}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,p] = \frac{ik}{\hbar}[p,x] = -k \tag{2}$$
$$\frac{dT}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,T] = -k\left(\frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2m},x\right]\right) = -\frac{kp}{m} \tag{3}$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,V] = k\left(\frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2m},x\right]\right) = \frac{kp}{m}. \tag{4}$$

La soluzione delle equazioni del moto è per posizione e impulso corrisponde ad un moto uniformemente accelerato ed è data da

$$x(t) = x_S + \frac{p_S}{m}t - \frac{k}{2m}t^2 \tag{5}$$
$$p(t) = p_S - kt. \tag{6}$$

Sostituendo vediamo quindi che la dipendenza dal tempo di energia cinetica e potenziale è

$$T(t) = \frac{1}{2}\frac{p(t)^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{(p_S-kt)^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{p_S^2}{2m} - \frac{k}{m}p_S t + \frac{k^2}{2m}t^2 = T_0 - \frac{k}{m}p_S t + \frac{k^2}{2m}t^2 \tag{7}$$
$$V(t) = kx(t) = kx_S + \frac{k}{m}p_S t - \frac{k^2}{2m}t^2 = V_0 + \frac{k}{m}p_S t - \frac{k^2}{2m}t^2, \tag{8}$$

dove abbiamo indicato con $x_S = x(0)$ e $p_S = p(0)$ gli operatori posizione e impulso alla Schrödinger, al tempo $t = 0$. Osserviamo che p non si conserva, infatti il potenziale non è invariante per traslazioni, mentre $T + V$ si conserva in quanto la hamiltoniana è invariante per traslazioni temporali.

2. Calcoliamo il commutatore tra l'operatore posizione al tempo t $x(t)$ e l'operatore posizione al tempo 0 $x(0) = x_S$, sfruttando il risultato ottenuto al punto precedente:

$$[x(t), x_S] = \left[x_S + \frac{p_S}{m}t - \frac{k^2}{2m}t^2, x_S\right] = \frac{t}{m}[p_S, x_S] = -\frac{i\hbar}{m}t. \tag{9}$$

Utilizzando il principio di indeterminazione di Heisenberg abbiamo che

$$\Delta^2 x(t)\,\Delta^2 x(0) \geq \frac{1}{4}\left|[x(t), x(0)]\right|^2. \tag{10}$$

Ipotizzando un'indeterminazione su $x(0)$ pari a $\Delta^2 x(0)$, ne discende che l'indeterminazione minima su una misura di posizione al tempo t sará data da:

$$\Delta^2 x(t)_{\min} = \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2\Delta^2 x(0)} \tag{11}$$

3. Si veda la sezione 5.2.2 delle dispense.

4. Se al tempo $t = 0$ viene effettuata una misura della posizione che rileva il sistema nel punto x_0 con precisione idealmente infinita significa che lo stato ψ dopo la misura si trova in un autostato della posizione:
$$|\psi_{x_0}\rangle = |x_0\rangle \tag{12}$$
tale che
$$x|x_0\rangle = x_0|x_0\rangle. \tag{13}$$
Abbiamo perciò
$$\psi_{x_0}(p) = \langle p|x_0\rangle = (\langle x_0|p\rangle)^* . \tag{14}$$
Ricordando che l'onda piana
$$\langle x|k\rangle = Ne^{ikx} \tag{15}$$
è un autostato dell'impulso con autovalore $\hbar k$ abbiamo
$$\psi_{x_0}(p) = \langle p|x_0\rangle = Ne^{-i\frac{p}{\hbar}x}. \tag{16}$$
Equivalentemente, il risultato può essere ottenuto notando che la funzione d'onda nella base delle posizioni è
$$\langle x|x_0\rangle = \psi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0) \tag{17}$$
da cui quella nella base degli impulsi Eq. (16) si ottiene facendo la trasformata di Fourier.
$$\langle p|\psi_{x_0}\rangle = \psi(p) = N\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{i}{\hbar}px}\psi(x) = Ne^{-\frac{i}{\hbar}p\,x_0}. \tag{18}$$
Visto che la funzione d'onda data descrive uno stato del continuo essa può essere normalizzata solo in senso improprio. La condizione di normalizzazione è
$$\langle x_0'|x_0\rangle = \delta(x_0' - x_0). \tag{19}$$
Ricordando la rappresentazione della delta di Dirac
$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{ikx}dk \tag{20}$$
e cambiando variabile di integrazione da k a p troviamo così
$$N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}, \tag{21}$$
avendo aribtrariamente scelto la fase in modo che la normalizzazione sia reale positiva.

5. Per trovare le autofunzioni della hamiltoniana risolviamo l'equazione agli autovalori
$$\langle p|\,H\,|\psi_E\rangle = E\,\langle p|\psi_E\rangle \tag{22}$$
che nella base degli impulsi diventa
$$\left(\frac{p^2}{2m} + ik\hbar\frac{d}{dp}\right)\psi_E(p) = E\psi_E(p). \tag{23}$$
L'equazione si può risolvere separando le variabili
$$\frac{d\psi_E}{\psi_E} = \frac{i}{k\hbar}\left(\frac{p^2}{2m} - E\right)dp \tag{24}$$

e integrando:

$$\psi_E(p) = N e^{\frac{i}{k\hbar}\left(\frac{p^3}{6m} - Ep\right)}. \tag{25}$$

Lo spettro di energia è continuo, e quindi la condizione di normalizzazione ha la forma

$$\langle \psi_E | \psi'_E \rangle = \delta\left(E - E'\right) \tag{26}$$

da cui discende che

$$\langle \psi_E | \psi'_E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, |N|^2\, e^{\frac{i}{\hbar k}(E-E')p} = 2\pi\hbar k\, \delta\left(E - E'\right) \tag{27}$$

e che quindi $N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar k}}$. L'autofunzione dell'hamiltoniana data, correttamente normalizzata risulta essere quindi:

$$\psi_E(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar k}\left(\frac{p^3}{6m} - Ep\right)}. \tag{28}$$

6. L'hamiltoniana H' descrive un oscillatore armonico di pulsazione $\sqrt{k'}$. Ma lo stato al tempo $t = -\epsilon$ è, come visto al punto (4), l'autostato della posizione con autovalore x_0 mentre lo stato al tempo $t = \epsilon$ risulta essere lo stato fondamentale di un oscillatore armonico. Quindi la probabilità richiesta si trova facilmente come

$$P = \left|\langle x_0 | \psi_0 \rangle\right|^2 = \left|\psi_0(x_0)\right|^2 = \sqrt{\frac{m\sqrt{k'}}{\hbar\pi}} e^{-\frac{m\sqrt{k'}x_0^2}{\hbar}} \tag{29}$$

7. Per determinare la funzione d'onda al tempo t applichiamo l'operatore di evoluzione temporale nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\psi(p,t) &= \langle p | S(t) | \psi \rangle = \langle p | e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dE\, \bar{p} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} |\psi_E\rangle \langle \psi_E | \psi \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi_E(p) \langle \psi_E | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi_E(p) \int_{-\infty}^{\infty} dp'\, \psi_E^*\left(p'\right) \psi\left(p'\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dp'\, \psi\left(p'\right) e^{\frac{i}{\hbar k}\left(\frac{p^3}{6m} - \frac{p'^3}{6m}\right)} \frac{1}{2\pi k\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dE\, e^{\frac{iE}{\hbar k}(p'-p+kt)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dp'\, \psi\left(p'\right) e^{\frac{i}{\hbar k}\left(\frac{p^3}{6m} - \frac{p'^3}{6m}\right)} \delta\left(p' - p + kt\right) \\
&= \psi(p - kt)\, e^{\frac{i}{\hbar k}\left(\frac{p^3}{6m} - \frac{(p-kt)^3}{6m}\right)},
\end{aligned} \tag{30}$$

dove abbiamo scambiato l'ordine di integrazione tra energia e impulso come suggerito nel testo.

Il risultato finale è quindi

$$\psi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar k}\left(\frac{p^3}{6m} - \frac{(p-kt)^3}{6m} - (p-kt)kx_0\right)}. \tag{31}$$