ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

25 Giugno 2014

Traccia di soluzione

1)

Esprimendo x e p in termini degli operatori di *creazione* e *distruzione*

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \qquad p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^\dagger) \tag{1}$$

abbiamo che

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \frac{1}{4}\,{}_-\langle 0|x(1-\sqrt{2}i)|1\rangle_- + \frac{1}{4}(1+\sqrt{2}i)_-\langle 1|x|0\rangle_- = \cdots = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \tag{2}$$

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = \frac{1}{4}\,{}_-\langle 0|p(1-\sqrt{2}i)|1\rangle_- + \frac{1}{4}(1+\sqrt{2}i)_-\langle 1|p|0\rangle_- = \cdots = -\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{4}}\,. \tag{3}$$

La probabilità che una misura del sistema lo riveli nello stato $|0\rangle_-$ è

$$P = |{}_-\langle 0|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4} \tag{4}$$

2)

Definiamo $H_\pm \equiv \frac{p^2}{2m} + V_\pm(x)$.

Per $t < 0$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_-, x] = \frac{i}{\hbar}[\frac{p^2}{2m}, x] = \frac{i}{2m\hbar}\left(p[p,x] + [p,x]p\right) = \frac{p}{m}\ , \tag{5}$$

$$\frac{dx^2}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_-, x^2] = \frac{i}{\hbar}[\frac{p^2}{2m}, x^2] = \frac{i}{2m\hbar}\left(p[p,x^2] + [p,x^2]p\right) = \cdots = \frac{px + xp}{m}\ , \tag{6}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_-, p] = \frac{i}{\hbar}[\frac{m\omega^2}{2}x^2, p] = \cdots = -m\omega^2 x\ , \tag{7}$$

$$\frac{dp^2}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_-, p^2] = \frac{i}{\hbar}[\frac{m\omega^2}{2}x^2, p^2] = \cdots = -m\omega^2(xp + px)\ . \tag{8}$$

Per $t \geq 0$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_+, x] = \frac{i}{\hbar}[\frac{p^2}{2m}, x] = \frac{p}{m} \ , \tag{9}$$

$$\frac{dx^2}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_+, x^2] = \frac{i}{\hbar}[\frac{p^2}{2m}, x^2] = \frac{px + xp}{m} \ , \tag{10}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_+, p] = \frac{i}{\hbar}[\frac{m\omega^2}{2}(x^2 - 2\delta x), p] = \cdots = -m\omega^2(x - \delta) \ , \tag{11}$$

$$\frac{dp^2}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_+, p^2] = \frac{i}{\hbar}[\frac{m\omega^2}{2}(x^2 - 2\delta x), p^2] = \cdots = -m\omega^2(xp + px - 2\delta p) \ . \tag{12}$$

3)

Sotto traslazioni l'operatore posizione x si trasforma come

$$e^{-\frac{i}{\hbar}p\delta}\, x\, e^{\frac{i}{\hbar}p\delta} = x - \delta \ , \tag{13}$$

pertanto

$$e^{-\frac{i}{\hbar}p\delta} V_-(x) e^{\frac{i}{\hbar}p\delta} = V_-(x - \delta) = \frac{m\omega^2}{2}(x - \delta)^2 = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 - 2\delta x + \delta^2) = V_+(x) + \kappa \ , \tag{14}$$

per cui $U_\delta = e^{\frac{i}{\hbar}p\delta}$ e $\kappa = \frac{m\omega^2\delta^2}{2}$.

4)

$H_\pm|n\rangle_- = E_{n\pm}|n\rangle_\pm$. Perciò

$$U_\delta^{-1} H_- |n\rangle_- = U_\delta^{-1} H_- U_\delta U_\delta^{-1}|n\rangle_- = (H_+ + \kappa) U_\delta^{-1}|n\rangle_- = E_{n-} U_\delta^{-1}|n\rangle_- \ . \tag{15}$$

Ne segue che gli autovalori di energia sono

$$E_{n+} = E_{n-} - \kappa = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) - \frac{m\omega^2\delta^2}{2} \tag{16}$$

mentre gli autostati delle due hamiltoniane sono legati da

$$|n\rangle_+ = U_\delta^{-1}|n\rangle_- \tag{17}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato le Eq. (13) e (20).

5)

Poichè la misura è immediatamente successiva, il sistema resta nello stesso stato, $|0\rangle_-$, che é lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico: i valori medi e le indeterminazioni di x e p sono quindi:

$${}_-\langle 0|x|0\rangle_- = {}_-\langle 0|p|0\rangle_- = 0 \ , \tag{18}$$

$$\Delta^2_\psi x = \,_-\langle 0|x^2|0\rangle_- = \frac{\hbar^2}{2m\omega} \;, \tag{19}$$

$$\Delta^2_\psi p = \,_-\langle 0|p^2|0\rangle_- = \frac{\hbar^2 m\omega}{2} \;. \tag{20}$$

6)

Per $t > 0$, dal punto (2) abbiamo che (in rappresentazione di Heisenberg)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{dp}{dt} = -\omega^2(x-\delta) \;, \tag{21}$$

che ha come soluzione

$$x(t) = (x(0)-\delta)\cos(\omega t) + \frac{p(0)}{m\omega}\sin(\omega t) + \delta \,. \tag{22}$$

Il valor medio della posizione ad un tempo t è quindi dato da

$$\langle x\rangle(t) = \,_-\langle 0| \left((x(0)-\delta)\cos(\omega t) + \frac{p(0)}{m\omega}\sin(\omega t) + \delta \right) |0\rangle_- = -\delta\cos(\omega t) + \delta, \tag{23}$$

dove si è fatto uso del fatto che per l'operatore alla Schrödinger $_-\langle 0|x|0\rangle_- = 0$ (notare che invece $_+\langle 0|x|0\rangle_+ = \delta$).

7)

$$\begin{aligned} P_n &= |\,_+\langle n|\psi,t\rangle|^2 = |\,_+\langle n|\exp(-\frac{i}{\hbar}H_+ t)|0\rangle_-|^2 = |\,_+\langle n|\exp(-\frac{i}{\hbar}E_{n+} t)|0\rangle_-|^2 \\ &= |\,_+\langle n|U_\delta|0\rangle_+|^2 = |\,_+\langle n|\exp(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\delta(-a^\dagger + a))|0\rangle_+|^2 \\ &= |\,_+\langle n|\exp(-\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\delta a^\dagger)\exp(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\delta a)\exp(\frac{m\omega}{2\hbar}\frac{\delta^2}{2}[a^\dagger, a])|0\rangle_+|^2 \\ &= \exp(-\frac{m\omega\delta^2}{2\hbar})|\,_+\langle n|\exp(-\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\delta a^\dagger)|0\rangle_+|^2, \end{aligned} \tag{24}$$

dove gli operatori di creazione e distruzione sono definiti nella Eq. (1), e nell'ultimo passaggio abbiamo osservato che $a|0\rangle_- = 0$. Possiamo calcolare l'elemento di matrice restante sviluppando l'esponenziale:

$$_+\langle n|\exp(-\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\delta a^\dagger)|0\rangle_+ = \,_+\langle n|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\delta a^\dagger\right)^k}{k!}|0\rangle_+ = \frac{\left(-\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\delta\right)^n}{\sqrt{n!}}. \tag{25}$$

Ne segue che

$$P_n = e^{-\frac{m\omega\delta^2}{2\hbar}} \frac{\left(\frac{m\omega\delta^2}{2\hbar}\right)^n}{n!}. \tag{26}$$