Esame Scritto di Fisica Moderna
Traccia di soluzione

23 Giugno 2016

1. Troviamo la normalizzazione N imponendo che

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1. \tag{1}$$

Nel nostro caso troviamo

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= |N|^2 \left(\langle 0|(1-i) + \langle 1|\, 2 + \langle 3|(1-i)\right)\left((1+i)|0\rangle + 2|1\rangle + (1-i)|3\rangle\right)\\ &= |N|^2 \left(2\langle 0|0\rangle + 4\langle 1|1\rangle + 2\langle 3|3\rangle\right) = 8|N|^2\end{aligned} \tag{2}$$

da cui discende

$$N = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Identificata la costante di normalizzazione calcoliamo il valor medio degli operatori x e p. A tal scopo, utilizzando l'espressione dell'operatore di distruzione a data nel suggerimento, troviamo le relazioni

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right) & x &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^\dagger\right)\\ a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right) & p &= -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(a - a^\dagger\right)\end{aligned} \tag{4}$$

che legano gli operatori di creazione e di distruzione $a^\dagger$ e a agli operatori posizione e impulso x e p.

Il valore medio della posizione si può immediatamente calcolare come

$$\begin{aligned}\langle\psi|\, x\,|\psi\rangle =& \frac{1}{8}\Bigg(\langle 0|(1-i) + \langle 1|\, 2 + \langle 3|(1-i)\Bigg)\\ &\Bigg(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^\dagger\right)\Bigg)\Bigg((1+i)|0\rangle + 2|1\rangle + (1-i)|3\rangle\Bigg)\\ =& \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(2(1-i)\langle 0|\, a\,|1\rangle + 2(1+i)\langle 1|\, a^\dagger\,|0\rangle\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\end{aligned} \tag{5}$$

mentre quello dell'impulso risulta essere

$$\begin{aligned}\langle\psi|\, p\,|\psi\rangle =& \frac{1}{8}\Bigg(\langle 0|(1-i) + \langle 1|\, 2 + \langle 3|(1-i)\Bigg)\\ &\Bigg(-i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(a - a^\dagger\right)\Bigg)\Bigg((1+i)|0\rangle + 2|1\rangle + (1-i)|3\rangle\Bigg)\\ =& \frac{-i}{8}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(2(1-i)\langle 0|\, a\,|1\rangle - 2(1+i)\langle 1|\, a^\dagger\,|0\rangle\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}},\end{aligned} \tag{6}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che gli operatori a e $a^\dagger$ hanno elementi di matrici nonnulli solo fra autostati di energia che differiscono di un'unità.

2. In possibili risultati per misure dell'energia sono $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ e $E_3 = \frac{7}{2}\hbar\omega$. Notiamo quindi che $E' = E_1$ e pertanto la misura data rivela se il sistema si trova nello stato $|1\rangle$ o meno. La probabilità di rivelare il sistema nello stato $|1\rangle$ è $P_1 = 4|N|^2 = \frac{1}{2}$, e quindi la probabilità di non trovarlo in questo stato è $P_{\bar{1}} = 1 - P_1 = \frac{1}{2}$

   Se la misura rivela che il sistema non è nello stato E_1, la sua funzione d'onda è proiettata nel sottospazio ortogonale a $|1\rangle$. Il vettore di stato $|\bar{\psi}'\rangle$ si trova quindi proiettando $|\psi\rangle$ nel sottospazio ortogonale a $|1\rangle$ e ricalcolando la normalizzazione. Troviamo cosí

$$|\bar{\psi}'\rangle = \frac{1}{2}\left((1+i)\,|0\rangle + (1-i)\,|3\rangle\right). \tag{7}$$

3. Calcoliamo ora in questo stato $|\bar{\psi}'\rangle$ il valore medio di x e la sua indeterminazione. Il valore medio è chiaramente nullo

$$\langle\bar{\psi}'|\, x\, |\bar{\psi}'\rangle = 0, \tag{8}$$

   visto che x ha elemento di matrice nullo negli autostati di energia, e tra autostati che diffieriscono di più di un'unità.

   L'indeterminazione invece non è nulla in quanto il valor medio di x^2 è diverso da 0. Tale valor medio riceve tuttavia solo contributi diagonali, in quanto x^2 ha elelemnto di matrice nullo tra autostati che diffieriscono di più di due unità. Troviamo

$$\begin{aligned}\langle\bar{\psi}'|\, x^2\, |\bar{\psi}'\rangle =& \frac{1}{4}\Bigg(\langle 0|\,(1-i) + \langle 3|\,(1+i)\Bigg)\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\left(\left(a^\dagger\right)^2 + aa^\dagger + a^\dagger a + a^2\right)\right)\\ &\Bigg((1+i)\,|0\rangle + (1-i)\,|3\rangle\Bigg)\\ =&\frac{\hbar}{4m\omega}\left(\langle 0|\, aa^\dagger\, |0\rangle + \langle 3|\, a^\dagger a + aa^\dagger\, |3\rangle\right) = \frac{2\hbar}{m\omega}\end{aligned} \tag{9}$$

   da cui segue che il valore dell'indeterminazione di x in questo stato è

$$\Delta^2 x = \frac{2\hbar}{m\omega} \tag{10}$$

4. L'evoluzione degli operatori a e $a^\dagger$ è data dall'equazione di Heinsemberg

$$\frac{da}{dt} = \frac{i}{\hbar}\,[H, a] \tag{11}$$

$$\frac{da^\dagger}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[H, a^\dagger\right]. \tag{12}$$

   Ora ricordando che l'Hamiltoniano dell'oscillatore armonico può essere riscritto in funzione degli operatori di creazione e di distruzione come

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{13}$$

   e che per questi operatori vale la relazione di commutazione

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1, \tag{14}$$

   le leggi di evoluzione temporale Eq. (11) e (12) possono essere riscritte come

$$\frac{da}{dt} = -i\omega a \tag{15}$$

$$\frac{da^\dagger}{dt} = i\omega a^\dagger. \tag{16}$$

La risoluzione è semplice e permette di scrivere la dipendenza temporale degli operatori a e $a^\dagger$ in rappresentazione di Heisenberg:

$$a(t) = a_H(t) = a_S e^{-i\omega t} \tag{17}$$
$$a^\dagger(t) = a_H^\dagger(t) = a_S^\dagger e^{i\omega t} \tag{18}$$

dove abbiamo indicato con a_S e $a_S^\dagger$ i rispettivi operatori in rappresentazione di Schrödinger, i quali coincidono con $a_H(0)$ e $a_H^\dagger(0)$. Ora conoscendo le espressioni di x e p in funzione di a e $a^\dagger$ possiamo scrivere la dipendenza temporale anche per gli operatori posizione e impulso, sempre in rappresentazione di Heisenberg:

$$\begin{aligned} x(t) = x_H(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a_H(t) + a_H^\dagger(t)\right) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a_S e^{-i\omega t} + a_S^\dagger e^{i\omega t}\right) \\ &= x_S \cos\omega t + \frac{p_S}{m\omega}\sin\omega t \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} p(t) = p_H(t) &= -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(a_H(t) - a_H^\dagger(t)\right) \\ &= -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(a_S e^{-i\omega t} - a_S^\dagger e^{i\omega t}\right) \\ &= p_S \cos\omega t - m\omega x_S \sin\omega t. \end{aligned} \tag{20}$$

È ora facile ricavare l'andamento in funzione del tempo del valor medio di posizione e impulso in uno stato generico: utilizzando la relazione tra rappresentazione di Heisenberg e Schrödinger e il fatto che per un generico stato $\psi_H = \psi_S(0)$ otteniamo

$$\langle\psi_S(t)|\, x_S\, |\psi_S(t)\rangle = \langle\psi_H|\, x_H(t)\, |\psi_H\rangle = \langle x_S\rangle \cos\omega t + \frac{\langle p_S\rangle}{m\omega}\sin\omega t \tag{21}$$
$$\langle\psi_S(t)|\, p_S\, |\psi_S(t)\rangle = \langle\psi_H|\, p_H(t)\, |\psi_H\rangle = \langle p_S\rangle \cos\omega t - m\omega\langle x_S\rangle \sin\omega t \tag{22}$$

dove abbiamo indicato per semplicita con $\langle x_S\rangle$, $\langle p_S\rangle$ il valor medio di x e p al tempo $t = 0$.

5. Per rispondere a questa domanda due differenti strategie possono essere attuate. Per completezza in questa soluzione le riportiamo entrambe. La prima possibilità è calcolare il valor medio della posizione e l'indeterminazione su questa misura utilizzando la rappresentazione di Schrödinger, cioè calcolare valor medi $\langle\bar\psi'_S(t)|\, x_S\, |\bar\psi'_S(t)\rangle$ e $\langle\bar\psi'_S(t)|\, x_S^2\, |\bar\psi'_S(t)\rangle$.

   Lo stato evoluto $|\bar\psi'_S(t)\rangle$ (alla Schrödinger) assume una forma piuttosto semplice in quanto lo stato iniziale è sovrapposizione lineare di autostati dell'energia. Esso è

$$|\bar\psi'_S(t)\rangle = \frac{1}{2}\left((1+i)\,|0\rangle\, e^{-\frac{i}{2}\omega t} + (1-i)\,|3\rangle\, e^{-\frac{7i}{2}\omega t}\right). \tag{23}$$

   Si vede subito che il valor medio di x in questo stato è nullo a tutti i tempi in quanto i due stati $|0\rangle$ e $|3\rangle$ differiscono per più di un'unità.

   Inoltre, il calcolo di x^2 svolto nella Eq. (9) mostra che solo elementi di matrice diagonale contribuiscono. Pertanto, tutte le fasi dipendenti dal tempo si cancellano tra bra e ket. Si trova quindi che i risultati ottenuti al punto 3 restano validi ed invariati a tutti i tempi t:

$$\langle x(t)\rangle = 0; \qquad \Delta^2 x(t) = \Delta^2 x(0) = \frac{2\hbar}{m\omega}. \tag{24}$$

   Un'altra possibilità per risolvere questo problema è quella di utilizzare il valor medio generico per gli operatori x e p in funzione del tempo t ricavato in Eq. (21) e Eq. (22).

Troviamo

$$\langle\bar{\psi}'_H|\,x_H(t)\,|\bar{\psi}'_H\rangle = \langle x_S\rangle\cos\omega t + \frac{\langle p_S\rangle}{m\omega}\sin\omega t = 0 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\langle\bar{\psi}'_H|\,x_H(t)^2\,|\bar{\psi}'_H\rangle &= \langle x_S^2\rangle\cos^2\omega t + \frac{\langle p_S^2\rangle}{m\omega}\sin^2\omega t + \langle x_S p_S + p_S x_S\rangle\cos\omega t\sin\omega t\\ &= \frac{2\hbar}{m\omega}\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right) = \frac{2\hbar}{m\omega},\end{aligned} \tag{26}$$

dove per eseguire il calcolo abbiamo utilizzato i seguenti risultati validi al tempo $t=0$

$$\langle x_S\rangle = \langle\bar{\psi}'|\,x\,|\bar{\psi}'\rangle = 0 \tag{27}$$

$$\langle p_S\rangle = \langle\bar{\psi}'|\,p\,|\bar{\psi}'\rangle = 0 \tag{28}$$

$$\langle x_S p_S + p_S x_S\rangle = \langle\bar{\psi}'|\,xp+px\,|\bar{\psi}'\rangle = 0 \tag{29}$$

$$\langle x_S^2\rangle = \langle\bar{\psi}'|\,x^2\,|\bar{\psi}'\rangle = \frac{2\hbar}{m\omega} \tag{30}$$

$$\langle p_S^2\rangle = \langle\bar{\psi}'|\,p^2\,|\bar{\psi}'\rangle = 2\hbar m\omega. \tag{31}$$

Abbiamo chiaramente ritrovato i valori trovati utilizzando la rappresentazione di Schrödinger.

6. Dato lo stato

$$|\psi''\rangle = \exp\left(i\frac{\delta}{\hbar}p\right)|0\rangle \tag{32}$$

la probabilità di ottenere il valore E' per una misura dell'energia è a qualunque tempo t

$$P_{E'} = \left|\langle 1|S(t)|\psi''\rangle\right|^2 = \left|\langle 1|e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|\psi''\rangle\right|^2 = \left|\langle 1|\psi''\rangle\right|^2, \tag{33}$$

e non dipende dal tempo perché $|1\rangle$ è un autostato dell'energia.

Per calcolare questo elemento di matrice riscriviamo lo stato $|\psi''\rangle$ utilizzando la formula di Campbell-Backer-Hausdorff data nel suggerimento:

$$\begin{aligned}|\psi''\rangle &= \exp\left(i\frac{\delta}{\hbar}p\right)|0\rangle = \exp\left(-\delta\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(a^\dagger - a\right)\right)|0\rangle\\ &= \exp\left(-\delta\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}a^\dagger\right)\exp\left(\delta\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}a\right)\exp\left(-\frac{\delta^2}{2}\frac{m\omega}{2\hbar}\right)|0\rangle.\end{aligned} \tag{34}$$

Ora l'esponenziale con a si può semplificare in quanto $a\,|0\rangle = 0$ e quindi

$$\exp\left(\delta\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}a\right)|0\rangle = |0\rangle. \tag{35}$$

E' ora possibile valutare la probabilità

$$\begin{aligned}P_{E'} = \left|\langle 1|\psi''\rangle\right|^2 &= \left|\exp\left(-\frac{\delta^2}{2}\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\langle 1|\sum_n \frac{\left(-\delta\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\right)^n}{\sqrt{n!}}\frac{\left(a^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle\right|^2\\ &= \left|\exp\left(-\frac{\delta^2}{2}\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\sum_n \frac{\left(-\delta\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\right)^n}{\sqrt{n!}}\langle 1|n\rangle\right|^2\\ &= \left|\exp\left(-\frac{\delta^2}{2}\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\left(-\delta\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\right)\right|^2\\ &= \delta^2\frac{m\omega}{2\hbar}\exp\left(-\delta^2\frac{m\omega}{2\hbar}\right).\end{aligned} \tag{36}$$

7. La funzione d'onda nella base delle posizioni si trova ricordando che $p/\hbar$ è il generatore delle traslazioni, e quindi $\exp\left(i\frac{\delta}{\hbar}p\right)$ è una traslazione finita:

$$\psi''(x) = \langle x|\psi''\rangle = \langle x|\exp\left(i\frac{\delta}{\hbar}p\right)|0\rangle = \langle x+\delta|0\rangle\,. \tag{37}$$

Ricordando che la funzione d'onda per lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico è data da

$$\langle x|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \tag{38}$$

troviamo

$$\psi''(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(x+\delta)^2\right) \tag{39}$$