ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

22 giugno 2018

Traccia di soluzione

(1) Ponendo $\alpha = 1/(2\sigma^2)$, il valore medio della posizione è

$$\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x \, \langle\psi|\hat{x}|x\rangle \langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \psi^*(x) x \psi(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, x \, e^{-\alpha(x-x_0)^2}, \tag{1}$$

e con un semplice cambio di variabile sotto integrale $x' = x - x_0$ otteniamo:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \, (x' + x_0) \, e^{-\alpha(x')^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left(0 + x_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = x_0, \tag{2}$$

in cui abbiamo usato il noto risultato per l'integrale gaussiano. Il valor medio dell'impulso è

$$\begin{aligned}\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle &= \int \mathrm{d}x \, \langle\psi|x\rangle \langle x|\hat{p}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) \\ &= -i\hbar \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, [-\alpha(x - x_0)] \, e^{-\alpha(x-x_0)^2} = i\hbar\alpha \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \, x' e^{-\alpha(x')^2} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Senza svolgere alcun calcolo avremmo potuto osservare che $\psi(x)$ è una funzione pari, la derivata è quindi una funzione dispari e questo significa che la funzione integranda è dispari su dominio pari, per cui il risultato è nullo.

L'indeterminazione in posizione al tempo $t = 0$ è data da $\Delta^2 x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$. Calcoliamo il valor medio di $\hat{x}^2$:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\hat{x}^2|\psi\rangle &= \int \mathrm{d}x \, \langle\psi|\hat{x}|x\rangle \langle x|\hat{x}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \psi^*(x) x^2 \psi(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \, (x' + x_0)^2 \, e^{-\alpha(x')^2} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \, (x')^2 \, e^{-\alpha(x')^2} + 0 + x_0^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right\} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} + x_0^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right\} = \frac{1}{2\alpha} + x_0^2 \end{aligned} \tag{4}$$

e quindi usando $\langle x \rangle = x_0$ otteniamo $\Delta^2 x = 1/2\alpha$, da cui ricordandoci che $\sigma^2 = 1/2\alpha$ ritroviamo $\Delta^2 x \equiv \sigma^2$, coerentemente con il significato di σ^2 di varianza della gaussiana. L'indeterminazione in impulso al tempo $t = 0$ si ottiene analogamente:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle &= \int \mathrm{d}x \, \langle\psi|\hat{p}|x\rangle \langle x|\hat{p}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \left(+i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) \\ &= +\hbar^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \alpha^2 (x - x_0)^2 \, e^{-\alpha(x-x_0)^2} = +\hbar^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \alpha^2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{\hbar^2 \alpha}{2} = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}, \end{aligned} \tag{5}$$

che è anche il risultato di $\Delta^2 p$ poichè $\langle p \rangle = 0$ come in (3).

(2) Le equazioni del moto alla Heisenberg per gli operatori x e p sono:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[H, x] = \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2m} \left[p^2, x \right] + \frac{i}{\hbar} \delta [x, x] = \frac{p}{m} \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[H, p] = \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2m} \left[p^2, p \right] + \frac{i}{\hbar} \delta [x, p] = -\delta, \tag{7}$$

in cui ci siamo serviti della formula

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \tag{8}$$

e di $[x, p] = -[p, x] = i\hbar$, oltre che del fatto che $[A, A] = 0$. Partendo dall'equazione differenziale (7) e poi risolvendo (6), troviamo le soluzioni:

$$p(t) = p(0) - \delta t \tag{9}$$

$$x(t) = x(0) + \frac{p(0)}{m}t - \frac{\delta}{2m}t^2. \tag{10}$$

Pertanto, i valori medi di posizione e impulso a un tempo t qualunque sono dati da:

$$\langle x(t)\rangle = \langle x(0)\rangle + \frac{t}{m}\langle p(0)\rangle - \frac{\delta}{2m}t^2 = x_0 - \frac{\delta}{2m}t^2 \tag{11}$$

$$\langle p(t)\rangle = \langle p(0)\rangle - \delta t = -\delta t \tag{12}$$

mentre, poichè $p^2(t) = p^2(0) + \delta^2 t^2 - 2p(0)\delta t$, abbiamo $\langle p^2(t)\rangle = \langle p^2(0)\rangle + \delta^2 t^2$ e quindi:

$$\Delta^2 p(t) = \frac{\hbar^2\alpha}{2} + \delta^2 t^2 - \delta^2 t^2 = \frac{\hbar^2\alpha}{2}, \tag{13}$$

che vediamo quindi essere indipendente dal tempo.

(3) Partendo dalle equazioni di moto alla Heisenberg già introdotte nelle equazioni (6) e (7), l'obiettivo è quello di calcolare i commutatori $[H, q]$ e $[H, p]$ assumendo un'hamiltoniana generale, somma di un termine cinetico $T(p)$ e di un potenziale $V(q)$, dove T e V sono funzioni regolari dipendenti solo da p e q rispettivamente. Esse possono essere quindi sviluppate in una serie di potenze nel loro argomento del tipo:

$$F(x) = \sum_k f_k x^k. \tag{14}$$

Abbiamo quindi per esempio:

$$\begin{aligned}[T(p), q] &= \left[\sum_k t_k p^k, q\right] = \sum_k t_k \left\{p[p^{k-1}, q] + [p, q]p^{k-1}\right\} = \sum_k t_k \left\{p[p^{k-1}, q] - i\hbar p^{k-1}\right\} \\ &= \sum_k t_k \left\{p^2[p^{k-2}, q] + p[p, q]p^{k-2} - i\hbar p^{k-1}\right\} = \sum_k t_k \left\{p^2[p^{k-2}, q] - i\hbar p^{k-1} - i\hbar p^{k-1}\right\} \\ &= \cdots = \sum_k t_k \left\{p^{k-1}[p, q] - (k-1)i\hbar p^{k-1}\right\} = -i\hbar \sum_k t_k k p^{k-1} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\sum_k t_k p^k = -i\hbar \frac{\partial T(p)}{\partial p}.\end{aligned} \tag{15}$$

Con passaggi analoghi si dimostra che:

$$[V(q), p] = i\hbar \frac{\partial V(q)}{\partial q}. \tag{16}$$

Pertanto le equazioni di moto alla Heisenberg per posizione e impulso possono essere riscritte come:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[H, q] = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[H, p] = -\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{18}$$

da cui, prendendo i valori medi, otteniamo il teorema di Ehrenfest.

(4) Calcoliamo $\Delta^2 x(t) = \langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2$. Da (10) abbiamo che:

$$\langle x^2(t)\rangle = \langle x^2(0)\rangle + \langle p^2(0)\rangle \frac{t^2}{m^2} + \frac{\delta^2 t^4}{4m^2} + \{\langle x(0)p(0)\rangle + \langle p(0)x(0)\rangle\} \frac{t}{m} - \langle x(0)\rangle \frac{\delta t^2}{m} - \langle p(0)\rangle \frac{\delta t^3}{2m^2}, \quad (19)$$

ma ricordandoci dei risultati della domanda (1) otteniamo:

$$\langle x^2(t)\rangle = \frac{1}{2\alpha} + x_0^2 + \frac{\hbar^2 \alpha t^2}{2m^2} + \frac{\delta^2 t^4}{4m^2} + \{2\langle x(0)p(0)\rangle - i\hbar\} \frac{t}{m} - x_0 \frac{\delta t^2}{m}. \quad (20)$$

Calcoliamo il valor medio di $\langle x(0)p(0)\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle \psi|\hat{x}\hat{p}|\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, x\, \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) = -i\hbar \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \left[-\alpha x(x-x_0)\right] e^{-\alpha(x-x_0)^2} \\ &= i\hbar\alpha \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x'\, (x'+x_0)x' e^{-\alpha(x')^2} = i\hbar\alpha \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{i\hbar}{2} \quad (21)\end{aligned}$$

e quindi il termine in parentesi graffa in (20) si annulla. Quindi, dato che $\langle x(t)\rangle^2 = x_0^2 + \frac{\delta^2 t^4}{4m^2} - x_0 \frac{\delta t^2}{m}$, abbiamo infine:

$$\Delta^2 x(t) = \frac{1}{2\alpha} + \frac{\hbar^2 \alpha t^2}{2m^2} = \Delta^2 x(0) + \frac{\hbar^2 \alpha t^2}{2m^2}. \quad (22)$$

Il principio di indeterminazione invece afferma che:

$$\Delta^2 x(t) \Delta^2 x(0) \geq \frac{1}{4} \left|\langle [x(t), x(0)]\rangle\right|^2. \quad (23)$$

Calcoliamo il commutatore al membro di destra di (23):

$$[x(t), x(0)] = \frac{t}{m}[p(0), x(0)] = -i\hbar \frac{t}{m} \quad (24)$$

e quindi concludiamo che:

$$\Delta^2 x(t) \geq \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \Delta^2 x(0)} = \frac{\hbar^2 \alpha t^2}{2m^2}. \quad (25)$$

Quindi per grande t, trasurando il termine $\Delta^2 x(0)$ a membro destro della Eq. (22), si vede che l'indeterminazione di una misura di posizione è la minima permessa dal principio di indeterminazione.

(5) Scriviamo l'equazione agli autovalori nella base degli impulsi:

$$\langle p|\hat{H}|\psi\rangle = E\langle p|\psi\rangle. \quad (26)$$

Ricordando che $\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i\hbar(\partial/\partial p)\psi(p)$ otteniamo l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial}{\partial p}\psi(p) = -\frac{1}{i\hbar\delta} \left[\frac{p^2}{2m} - E\right] \psi(p) \quad (27)$$

con soluzione

$$\psi(p) = \mathcal{N} \exp\left(\frac{i}{\hbar\delta} \left[\frac{p^3}{6m} - Ep\right]\right), \quad (28)$$

dove $\mathcal{N}$ è una costante di normalizzazione.

Questa funzione d'onda non può mai essere normalizzata in senso proprio. Questo è dovuto al fatto che per $x \to infty$ (se $\Delta > 0$) il potenziale soddisfa $\lim_{x\to-\infty} V(x) = -\infty$ e quindi il valore dell'energia, qualunque esso sia, è sempre maggiore del potenziale. La funzione d'onda ha quindi sempre un andamento oscillante nel limite e non può essere normalizzata in senso proprio. Questo si vede anche esplicitamente osservando che l'autofunzione $\psi(p)$ soddisfa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \, |\mathcal{N}|^2 \cdot 1 = \infty. \tag{29}$$

È possibile invece normalizzare le autofunzioni di energia in senso improprio in quanto possiamo imporre che $\langle \psi_E | \psi'_E \rangle = \delta(E - E')$:

$$\langle \psi_E | \psi'_E \rangle = |\mathcal{N}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \, \exp\left(\frac{i}{\hbar\delta} \left[E - E' \right] p \right) = |\mathcal{N}|^2 2\pi\delta \left(\frac{E - E'}{\hbar\delta} \right) = \{ |\mathcal{N}|^2 2\pi\hbar\delta \} \delta(E - E'), \tag{30}$$

da cui leggiamo

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\delta}}. \tag{31}$$

Osserviamo infine che lo spettro non è degenere. Possiamo capirlo come conseguenza del fatto che $\lim_{x\to\infty} V(x) = \infty > E$ per ogni E. Pertanto, pr $x \to \infty$ l autofunzione di energia è esponenziale. Ma delle sue soluzione esponenziali una diverge e non è quindi accettabile. Resta pertanto una unica soluzione accettabile per ogni E

(6) Partendo dall'espressione generale per l'operatore di evoluzione temporale $S(t)$ e inserendo l'hamiltoniana, otteniamo:

$$S(t) = \exp\left[\frac{1}{i\hbar} H t \right] = \exp\left[\frac{t}{i\hbar} \left(\frac{p^2}{2m} + \delta x \right) \right]. \tag{32}$$

Sviluppando l'esponente del membro a destra della formula BCH abbiamo:

$$a_1 p^2 + a_2 p + bx + \frac{1}{2} \left[2a_1 b(-i\hbar) p + a_2 b(-i\hbar) \right] + \frac{1}{12} \left[(-i\hbar)^2 2a_1 b \right] = a_1 p^2 + (a_2 - i\hbar a_1 b) \, p + bx + c, \tag{33}$$

dove c è una costante. Identificando

$$a'_1 = \frac{t}{2i\hbar m} \quad b' = \frac{t\delta}{i\hbar} \quad a'_2 = \frac{\delta t^2}{2i\hbar m} \tag{34}$$

otteniamo l'uguaglianza tra (33) e l'esponente di (32) a meno di una costante che possiamo sommare e sottrarre, e quindi usando la formula BCH possiamo scrivere

$$S(t) = \exp\left[\frac{t}{i\hbar} \left(\frac{p^2}{2m} + \delta x \right) + c \right] \exp\left[-c \right] = \exp[-c] \exp\left[\frac{t}{i\hbar} \left\{ \frac{p^2}{2m} + \frac{\delta t}{2m} p \right\} \right] \exp\left[\frac{t}{i\hbar} \{ \delta x \} \right] \tag{35}$$

e quindi le costanti richieste si ottengono dividendo quelle della Eq. (34) per $t/i\hbar$, ossia

$$a_1 = \frac{1}{2m}, \quad b = \delta, \quad a_2 = \frac{\delta t}{2m}. \tag{36}$$

La dipendenza temporale per l'autofunzione di energia (28) è quindi data da:

$$\langle p | \psi_E(t) \rangle = \langle p | S(t) | \psi_E \rangle = \exp\left[\frac{t}{i\hbar 2m} \left(p^2 + \delta t p \right) \right] \exp\left[\delta t \frac{\partial}{\partial p} \right] \psi_E(p, 0). \tag{37}$$

Ma poiché

$$\exp\left[\delta t \frac{\partial}{\partial p} \right] \psi_E(p, 0) = \psi_E(p, 0) + \left(\frac{\partial}{\partial p} \psi_E(p, 0) \right) (\delta t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 p} \psi_E(p, 0) \right) (\delta t)^2 + \dots \tag{38}$$

nel membro di sinistra riconosciamo lo sviluppo in serie di Taylor di $\psi_E(p+\delta t, 0)$ e quindi concludiamo che

$$\psi_E(p,t) = \exp\left[\frac{t}{i\hbar 2m}\left(p^2 + \delta t p\right)\right]\psi_E(p+\delta t, 0). \tag{39}$$

Questo significa che, a meno di una fase, l'autofunzione al tempo t si ottiene da quella al tempo $t = 0$ attraverso la sostituzione $p \to p + \delta t$, consistentemente con l'equazione del moto alla Heisenberg Eq. (9).

(7) Nella base delle coordinate, l'equazione agli autovalori ha la forma

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \delta x\right\}\psi(x) = E\psi(x). \tag{40}$$

Nel limite per $x \to +\infty$ (de $\delta > 0$) il potenziale è infinitamente alto, pertanto qualunque autostato di energia sia esponenzialmente soppresso. In questo limite, il membro a destra di (40) è trascurabile e quindi l'equazione agli autovalori si riduce a

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\psi(x) = \delta x\psi(x). \tag{41}$$

La soluzione di questa equazione è di tipo esponenziale: ponendo $\psi(x) = \exp(-f(x))$ abbiamo

$$(f'(x))^2 = \frac{2m\delta}{\hbar^2}x + f''(x). \tag{42}$$

Se f e f' sono funzioni crescenti di x, allora f'' è positiva e dalla (42) abbiamo $(f'(x))^2 \gg f''(x)$ per $x \to +\infty$, pertanto trascurando la derivata seconda in (42) otteniamo:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2m\delta}}{\hbar}\sqrt{x}, \tag{43}$$

il che ci permette di concludere che

$$f(x) \sim x^{3/2} \quad x \to +\infty. \tag{44}$$

Nel limite $x \to -\infty$ invece abbiamo la situazione opposta: $E > V$, e quindi qualsiasi autostato di energia ha un comportamento oscillante. In questo linite dunque possiamo sempre porre $\psi(x) = \sin(g(x) + \delta)$. In modo analogo a prima otteniamo l'equazione differenziale per la g:

$$(g'(x))^2 = -\frac{2m\delta}{\hbar^2}x + g''(x)\cot(g(x)). \tag{45}$$

Trascurando la derivata seconda, poichè $(g'(x))^2 \gg |g''(x)|$ concludiamo che

$$g(x) \sim |x|^{3/2} \quad x \to -\infty. \tag{46}$$