Esame di Fisica Moderna: Soluzioni

14 novembre 2008

1. **Valori medi**

   Riscriviamo x e p in termini di a e $a^\dagger$:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(a^\dagger + a) \tag{1}$$
$$p = \frac{m\omega}{2i}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(a - a^\dagger). \tag{2}$$

   Ricordando che

$$|1\rangle = a^\dagger|0\rangle \tag{3}$$

   ed utilizzando l'ortonormalità degli autostati di energia dell'oscillatore armonico si ha immediatamente

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 0| - \sqrt{\frac{1}{3}}\langle 1|\right) x \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle\right) = \\ &= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 0| - \sqrt{\frac{1}{3}}\langle 1|\right) \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(a^\dagger + a) \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle\right) = \\ &= -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\end{aligned} \tag{4}$$

   e

$$\langle p\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 0| - \sqrt{\frac{1}{3}}\langle 1|\right) \frac{m\omega}{2i}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(a - a^\dagger) \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle\right) = 0 \tag{5}$$

   Ricordando che $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ ed $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ si ottiene immediatamente il valor medio dell'energia:

$$\langle H\rangle = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\hbar\omega\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\hbar\omega\right) = \frac{5}{6}\hbar\omega \tag{6}$$

   La funzione d'onda per lo stato $|\psi\rangle$ è illustrata dalla Fig. 1. Notare che essa è reale.

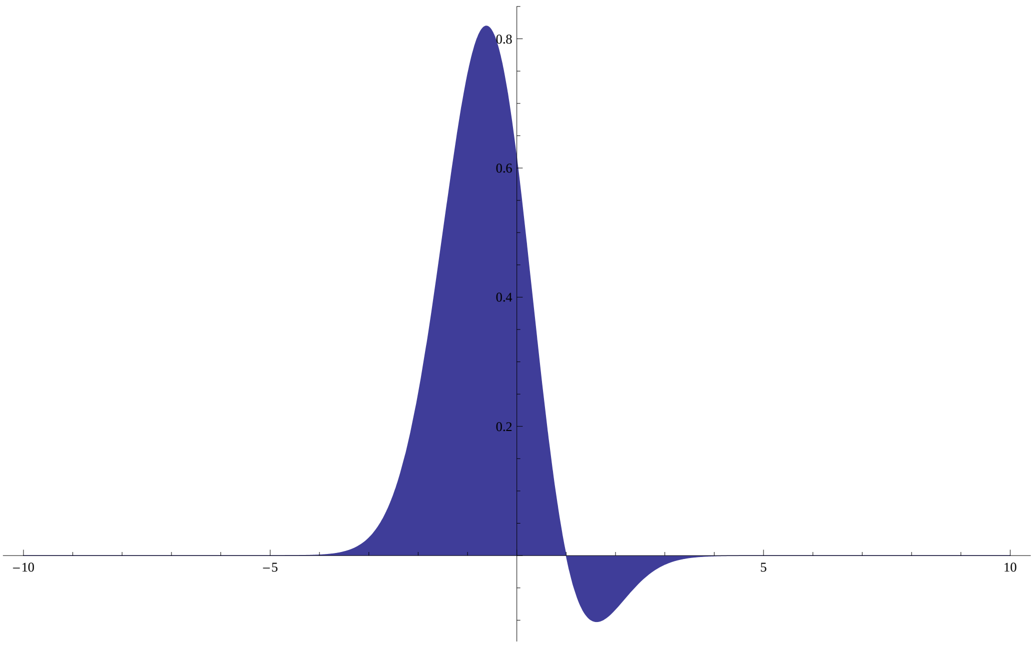

Figura 1: Funzione d'onda per lo stato $|\psi\rangle$.

2. **Evoluzione temporale**
   L'evoluzione dello stato ψ si ottiene facilmente poiché esso è espresso in termini di autostati di energia:

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-\frac{i}{2}\omega t}|0\rangle - e^{-\frac{3}{2}i\omega t}\sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle \tag{7}$$

   Ripetendo il calcolo del punto precedente si ottiene:

$$\langle x\rangle_t = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\cos\omega t \tag{8}$$

$$\langle p\rangle_t = \frac{2m\omega}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right) = \frac{2m\omega}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\sin\omega t \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

3. **Matrice densità**
   Poiché lo stato dato è uno stato puro, la matrice densità è data da

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle e^{-\frac{i}{2}\omega t} - \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle e^{-\frac{3i}{2}\omega t}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}e^{\frac{i}{2}\omega t}\langle 0| - \sqrt{\frac{1}{3}}e^{\frac{3i}{2}\omega t}\langle 1|\right) =$$

$$= \frac{2}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{3}|1\rangle\langle 1| - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i\omega t}|1\rangle\langle 0| - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\omega t}|0\rangle\langle 1|. \tag{11}$$

Attraverso la matrice densità il valor medio dell'energia si ottiene dalla traccia

$$\begin{aligned}\langle E(t)\rangle &= \mathrm{Tr}\rho H_0 = \sum \langle_n n|\rho H_0|n\rangle = \langle 0|\rho H_0|0\rangle + \langle 1|\rho H_0|1\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega\langle 0|\rho|0\rangle + \frac{3}{2}\hbar\omega\langle 1|\rho|1\rangle = \frac{5}{6}\hbar\omega \end{aligned} \tag{12}$$

Il valor medio dell'energia non dipende dal tempo perché il sistema è invariante per traslazioni temporali, in quanto l'hamiltoniana non dipende dal tempo.

I possibili risultati di una misura di energia al tempo t sono o $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ oppure $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$, con probabilità data da $P_i = |\langle i|\psi\rangle|^2$, cioè $P_0 = \frac{2}{3}$ e $P_1 = \frac{1}{3}$ Queste probabilità non dipendono dal tempo in seguito all'invarianza del sistema per traslazioni temporali.

Dopo la misura la matrice densità assume la forma:

$$\rho = |0\rangle\langle 0| \qquad \text{quando il risultato della misura è } E_0 \tag{13}$$

$$\rho = |1\rangle\langle 1| \qquad \text{quando il risultato della misura è } E_1 \tag{14}$$

4. **Oscillatore armonico traslato**

Completando il quadrato, la hamiltoniana H si può riscrivere in termini di una hamiltoniana di oscillatore armonico il cui potenziale è centrato in un punto x_0, cioè $\frac{1}{2}m\omega^2(x-x_0)^2$:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - Ex = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x - \frac{E}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{E^2}{2m\omega^2} \tag{15}$$

Lo spettro di autovalori dell'Hamiltoniana H coincide quindi con quello dell'hamiltoniana H_0 a meno di una costante additiva, visto che si tratta di oscillatori armonici aventi la stessa frequenza ω:

$$\overline{E}_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar\omega - \frac{E^2}{2m\omega^2}. \tag{16}$$

Gli autostati $\overline{|n\rangle}$ di H si possono ottenere dagli autostati $|n\rangle$ di H_0 osservando che le due hamiltoniane sono legate da una traslazione $\mathcal{T}_\delta$ di lunghezza $\delta = \frac{E}{m\omega^2}$, esplicitamente data da

$$\mathcal{T}_\delta = e^{-\frac{i}{\hbar}\delta p}, \tag{17}$$

dove p è l'operatore impulso. Si ha cioè

$$H = \mathcal{T}_\delta H_0 \mathcal{T}_\delta{}^\dagger, \tag{18}$$

che implica

$$\overline{|n\rangle} = \mathcal{T}_\delta |n\rangle. \tag{19}$$

In particolare, le autofunzioni nella base delle coordinate

$$\overline{\phi_n}(x) \equiv \langle x\overline{|n\rangle} \tag{20}$$
$$\phi_n(x) \equiv \langle x|n\rangle \tag{21}$$

sono legate da

$$\overline{\phi_n}(x) = \phi_n(x-\delta). \tag{22}$$

5. **Valori medi traslati**

Ricordiamo innanzitutto che negli autostati $|n\rangle$ di H si ha

$$\langle n|x|n\rangle = \langle n|p|n\rangle = 0, \tag{23}$$

in conseguenza del fatto che gli operatori x e p sono dispari, mentre l'hamiltoniana H è pari sotto la trasformazione di parità $x \to -x$.

I valori medi negli stati $\overline{|n\rangle}$ si possono ottenere da quelli negli stati $|n\rangle$ utilizzando la eq. (19)

$$\overline{\langle n|}x\overline{|n\rangle} = \langle n|\mathcal{T}_\delta^\dagger x \mathcal{T}_\delta|n\rangle = \langle n|x|n\rangle + \delta = \delta \tag{24}$$
$$\overline{\langle n|}p\overline{|n\rangle} = \langle n|\mathcal{T}_\delta^\dagger p \mathcal{T}_\delta|n\rangle = \langle n|p|n\rangle = 0, \tag{25}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $[\mathcal{T}_\delta, p] = 0$.

6. **Probabilità di transizione**

Dopo la misura effettuata al tempo t il sistema si trova nello stato $|0\rangle$. A partire dal tempo t questo stato evolve con la hamiltoniana H. Al tempo $t' > t$ il sistema si trova pertanto nello stato

$$|\psi_0(t)\rangle = \exp\left[\frac{1}{i\hbar} H(t'-t)\right]|0\rangle. \tag{26}$$

La probabilità che una misura al tempo t dia come risultato $\overline{E_n}$ è data dalla proiezione sul corrispondente autostato di energia:

$$\begin{aligned} P_n &= |\langle\overline{n}|\psi_0(t)\rangle|^2 = |\langle\overline{n}|\exp^{\frac{1}{i\hbar}H(t'-t)}|0\rangle|^2 = |\langle n|e^{\frac{i}{\hbar}\delta p}|0\rangle|^2 && (27)\\ &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x-\delta)\phi_0(x)\right|^2. && (28)\end{aligned}$$

La eq. (28) implica che le P_n sono in generale tutte diverse da zero, mentre la eq. (27) implica che esse sono tutte indipendenti dal tempo. Alcuni degli overlap $\overline{\langle n}|0\rangle$ sono illustrati in Figura 2.

La probabilità che il sistema resti in $|0\rangle$ è invece data da

$$P'_0(t) = |\langle 0|\psi_0(t)\rangle|^2 = |\langle 0|\exp\left[\frac{1}{i\hbar}H(t'-t)\right]|0\rangle|^2 \tag{29}$$

$$= \sum_n \left|\langle 0\overline{|n\rangle\langle n|}\exp\left[\frac{1}{i\hbar}H(t'-t)\right]|0\rangle\right|^2 \tag{30}$$

$$= \left|\sum_n P_n \exp\left(\frac{(t'-t)\overline{E_n}}{i\hbar}\right)\right|^2, \tag{31}$$

dove le P_n sono date dall'eq. (28) e le $\overline{E_n}$ dall'eq. (16). La $P'_0(t)$ dipende dal tempo in quanto le $\overline{E_n}$ sono diverse fra loro, mentre le P_n sono tutte diverse da zero e quindi interferiscono fra di loro.

7. **Transizione allo stato fondamentale**

La probabiliṭi transizione si può calcolare sia utilizzando la base delle coordinate, sia utilizzando le relazioni di commutazione.

Utilizzando la base delle coordinate, dall'eq. (22) per $n = 0$ si ottiene

$$P_0 = |\langle\overline{0}|0\rangle|^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(x-\delta)\phi_0(x)\right|^2 \tag{32}$$

Ricordando la forma dell'autofunzione per lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico nella base delle coordinate

$$\phi_0(x) = Ce^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Delta}\right)^2}, \tag{33}$$

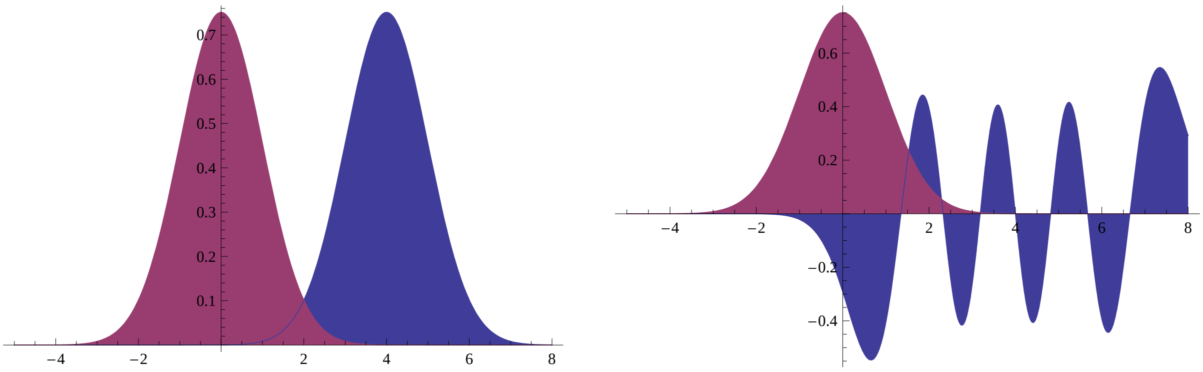

Figura 2: Overlap dello stato fondamentale di H_0 con lo stato fondamentale di H (a sinistra) e con il settimo stato eccitato (a destra).

con $\Delta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ e C fissata da $|\langle 0|0\rangle|^2 = 1$, si ha

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \left| |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\delta}{\Delta}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Delta}\right)^2} \right|^2 \\
&= \left| |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\Delta}\right)^2 - \frac{\delta x}{\Delta^2} - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\Delta^2}} \right|^2 = \left| |C|^2 e^{-\frac{1}{4}\frac{\delta^2}{\Delta^2}} C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x+\delta/2}{\Delta}\right)^2} \right|^2 = \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\Delta^2} \right]. \qquad (34)
\end{aligned}
$$

Alternativamente, possiamo osservare che la eq. (27) implica

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \left| \langle 0| e^{\frac{-i}{\hbar}\delta p} |0\rangle \right|^2 \\
&= \left| \langle 0| e^{\delta\left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(a^\dagger - a)\right]} |0\rangle \right|^2, \qquad (35)
\end{aligned}
$$

avendo usato la eq. (2) nell'ultimo passaggio. Ricordando la relazione di Baker-Campbell-Hausdorff $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$ (valida quando $[A,B]$ commuta con A e B) si ha

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \left| \langle 0| e^{\delta\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}a^\dagger} e^{-\delta\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}a} e^{-\delta^2\frac{m\omega}{2\hbar}} |0\rangle \right|^2 \\
&= \left| e^{-\delta^2\frac{m\omega}{4\hbar}} \langle 0|0\rangle \right|^2 \\
&= e^{-\delta^2\frac{m\omega}{2\hbar}}, \qquad (36)
\end{aligned}
$$

dove si è sfruttato il fatto che il valor medio di qualunque potenza di a o $a^\dagger$ nello stato $|0\rangle$ si annulla, in accordo con la eq. (34).