Esame scritto di fisica moderna

Traccia di soluzione

24 luglio 2012

Esercizio 1. L'hamiltoniana data è quella di una buca di potenziale infinita, le cui autofunzioni sono date da due famiglie, dispari ($\psi_{2n}(x) = -\psi_{2n}(x)$) e pari ($\psi_{2n+1}(x) = \psi_{2n+1}(-x)$)

$$\psi_{2n}(x) = A\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right), \; n = 1, 2, ... \tag{1}$$

$$\psi_{2n+1}(x) = B\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right), \; n = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

associate ai valori di energia

$$E_{2n} = \frac{\hbar^2 k_{2n}^2}{2m} = \frac{4n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2}, \; n = 1, 2, ... \tag{3}$$

$$E_{2n+1} = \frac{\hbar^2 k_{2n+1}^2}{2m} = \frac{(2n+1)^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2}, \; n = 0, 1, 2, ... \tag{4}$$

Ricaviamo i coefficienti A e B usando la condizione di normalizzazione e ponendo la fase arbitraria eguale a uno:

$$1 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |\psi_n(x)|^2 dx = |A|^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin^2\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx = |B|^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos^2\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right) dx \Longrightarrow A = B = \sqrt{\frac{2}{L}} \tag{5}$$

$$\psi_{2n}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right), \; n = 1, 2, ... \tag{6}$$

$$\psi_{2n+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right), \; n = 0, 1, 2, ... \tag{7}$$

Il valore medio dell'impulso e della posizione nell'n-esimo autostato dell'Hamiltoniana sono

$$\langle p\rangle = \langle x\rangle = 0 \tag{8}$$

in quanto sono dati dall'integrale di una funzione pari su dominio dispari.

Le indeterminazione dell'impulso si ottiene notando che

$$\langle p^2\rangle = \langle 2mE_n\rangle = \frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{L^2}, \tag{9}$$

da cui

$$\Delta^2 p = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2. \tag{10}$$

L'indeterminazione in posizione si ottiene da

$$\langle x^2 \rangle = \begin{cases} \langle \psi_{2n}(x)|x^2|\psi_{2n}(x)\rangle = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \sin^2\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)dx = \frac{L^2}{12}\left(1 - \frac{6}{4n^2\pi^2}\right), & n = 1, 2... \\ \langle \psi_{2n+1}(x)|x^2|\psi_{2n+1}(x)\rangle = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \cos^2\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right)dx = \frac{L^2}{12}\left(1 - \frac{6}{(2n+1)^2\pi^2}\right), & n = 0, 1, 2.. \end{cases} \tag{11}$$

quindi

$$\Delta^2 x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{L^2}{12}\left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right),\ n = 1, 2, 3... \tag{12}$$

Esercizio 2. Iniziamo scrivendo, in notazione di Dirac, lo stato come

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}}{\sqrt{2}}|\psi_1\rangle + \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}|\psi_2\rangle, \tag{13}$$

dove $E_1 = \hbar^2\pi^2/2mL^2$ e $E_2 = 2\hbar^2\pi^2/mL^2$. Esso dipende dal solo parametro α perchè una sovrappossizione di due stati in generale dipende da quattro parametri. Di questi uno è una fase globale inosservabile, un altro è fissato per normalizzazione, ed un terzo è fissato dalla condizione che i due possibili risultati dati siano equiprobabili.

Nella base delle coordinate

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{\sqrt{L}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}e^{i\alpha}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \tag{14}$$

Utilizzando questo risultato calcoliamo la matrice densità del sistema:

$$\begin{aligned} \langle x|\rho|y\rangle &= \langle x|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|y\rangle & (15)\\ &= \left\{\frac{1}{\sqrt{L}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{\sqrt{L}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}e^{i\alpha}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right\}\times & (16)\\ &\qquad \left\{\frac{1}{\sqrt{L}}e^{\frac{i}{\hbar}E_1 t}\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) + \frac{1}{\sqrt{L}}e^{\frac{i}{\hbar}E_2 t}e^{-i\alpha}\sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right)\right\} & (17)\\ &= \frac{1}{L}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) + \right. & (18)\\ &\qquad \left. e^{i\left[(E_2-E_1)\frac{t}{\hbar}-\alpha\right]}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) + e^{-i\left[(E_2-E_1)\frac{t}{\hbar}-\alpha\right]}\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]. & (19) \end{aligned}$$

Supponiamo che sia stata eseguita una misura di energia sullo stato $\psi(x,t)$, ottenendo come risultato E_1. Lo stato dopo tale misura è

$$\psi_{|\psi_1\rangle}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \tag{20}$$

associato alla matrice densità

$$\langle x|\rho_{|\psi_1\rangle}|y\rangle = \frac{1}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right), \tag{21}$$

$$\langle x|\rho_{|\psi_1\rangle}|x\rangle = \frac{1}{L}\cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right). \tag{22}$$

Se invece si è ottenuto come risultato E_2 lo stato è

$$\psi_{|\psi_2\rangle} = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} e^{i\alpha} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \tag{23}$$

associato alla matrice densità

$$\langle x|\rho_{|\psi_2\rangle}|y\rangle = \frac{1}{L}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right), \tag{24}$$

$$\langle x|\rho_{|\psi_2\rangle}|x\rangle = \frac{1}{L}\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \tag{25}$$

Esercizio 3. Fissiamo $t = 0$, e calcoliamo il valore medio dell'impulso p, sapendo che

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{L}}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + e^{i\alpha}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]. \tag{26}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\langle p\rangle &= -\frac{i\hbar}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + e^{-i\alpha}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]\left[-\frac{\pi}{L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + e^{i\alpha}\frac{2\pi}{L}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]dx \\
&= -\frac{i\hbar\pi}{L^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left[2e^{i\alpha}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - e^{-i\alpha}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]dx \\
&= -\frac{i\hbar\pi}{L^2}\left(2e^{i\alpha}\frac{2L}{3\pi} - e^{-i\alpha}\frac{4L}{3\pi}\right) \\
&= -i\frac{4\hbar}{3L}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) = \frac{8\hbar}{3L}\sin\alpha.
\end{aligned} \tag{27}$$

Pertanto se imponiamo la condizione $\langle p\rangle = \frac{4\hbar}{3L}$ troviamo $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, ossia $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Esercizio 4. Lo stato al generico tempo t è

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}}\left[e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}e^{i\frac{\pi}{6}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]. \tag{28}$$

Il valore medio dell'impulso in funzione di t è quindi

$$\begin{aligned}
\langle p\rangle &= -\frac{i\hbar}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left[e^{\frac{i}{\hbar}E_1 t}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + e^{\frac{i}{\hbar}E_2 t}e^{-i\frac{\pi}{6}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]\left[-e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\frac{\pi}{L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}e^{i\frac{\pi}{6}}\frac{2\pi}{L}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]dx \\
&= -\frac{i\hbar\pi}{L^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left[e^{i\left[(E_1-E_2)\frac{t}{\hbar}+\frac{\pi}{6}\right]}2\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - e^{-i\left[(E_1-E_2)\frac{t}{\hbar}+\frac{\pi}{6}\right]}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]dx \\
&= -i\frac{4\hbar}{3L}\left(\left[e^{i\left[(E_1-E_2)\frac{t}{\hbar}+\frac{\pi}{6}\right]} - e^{-i\left[(E_1-E_2)\frac{t}{\hbar}+\frac{\pi}{6}\right]}\right]\right) \\
&= \frac{8\hbar}{3L}\sin\left((E_1 - E_2)\frac{t}{\hbar} + \frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned} \tag{29}$$

Questa quantità è nulla se e solo se l'argomento del seno è uguale a $n\pi$:

$$\begin{aligned}
(E_1 - E_2)\,\frac{t}{\hbar} + \frac{\pi}{6} &= n\pi && (30)\\
\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} - \frac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2}\right)\frac{t}{\hbar} &= n\pi - \frac{\pi}{6} && (31)\\
-\frac{3}{2}\frac{\hbar\pi^2}{mL^2}t &= n\pi - \frac{\pi}{6}, && (32)
\end{aligned}$$

quindi

$$t_0 = \frac{mL^2}{9\hbar\pi}(1+6n). \tag{33}$$

Esercizio 5. L'equazione di Schrödinger per le autofunzioni dispari di energia è

$$\begin{aligned}
\hat{H}|\psi_{2n}(x)\rangle &= E_{2n}|\psi_{2n}(x)\rangle && (34)\\
\langle x|\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)|\psi_{2n}(x)\rangle &= E_{2n}\langle x|\psi_{2n}(x)\rangle && (35)
\end{aligned}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{2n}''(x) - \frac{\hbar^2 g^2}{2m}\int_{-L/2}^{L/2}\delta(x)\psi_{2n}(x)dx = E_{2n}\psi_{2n}(x). \tag{36}$$

Ma l'integrale con $\delta(x)$ si annulla dato che la funzione è dispari ($\psi(0) = -\psi(0) = 0$), quindi ritroviamo la stessa equazione di Schrödinger che per il potenziale V_0. Ne segue che le autofunzioni dispari del primo sistema sono anche autofunzioni di questo nuovo sistema.

Esercizio 6. Supponendo di avere uno stato ad energia negativa $E < 0$, partiamo dall'equazione di Schrödinger nella regione $-L/2 \le x \le L/2$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = \left(E + \frac{\hbar^2 g^2}{2m}\delta(x)\right)\psi(x). \tag{37}$$

La soluzione generale è del tipo

$$\psi(x) = c_1 e^{\kappa x} + c_2 e^{-\kappa x}, \quad \text{dove } \kappa^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} > 0, \tag{38}$$

e può quindi riscritta come

$$\psi(x) = C\sinh(\kappa x + \delta)\,. \tag{39}$$

Imponendo che la funzione d'onda si annulli ai bordi della buca otteniamo

$$\psi(x) = \begin{cases} A\sinh(\kappa(x + L/2)) & \text{se } -L/2 < x < 0 \\ B\sinh(\kappa(x - L/2)) & \text{se } 0 < x < L/2. \end{cases} \tag{40}$$

Dalla continuità della funzione d'onda nell'origine otteniamo così

$$A = -B. \tag{41}$$

Le costanti possono essere fissate per normalizzazione (non richiesta). Si ha

$$A = \sqrt{\frac{2\kappa}{\sinh(\kappa L) - \kappa L}}. \tag{42}$$

La condizione su g può essere ottenuta imponendo la discontinuità della derivata prima della funzione d'onda nell'origine:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\psi''(x)dx = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi'(0^+)-\psi'(0^-)\right) = \frac{\hbar^2 g^2}{2m}\psi(0), \tag{43}$$

da cui

$$\frac{2\kappa}{g^2} = \tanh\left(\kappa\frac{L}{2}\right). \tag{44}$$

Questa equazione ha una soluzione (unica) se $g^2 > 4/L$.