ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

17 Luglio 2014

Traccia di soluzione

1)

Per il primo sistema la funzione d'onda è

$$\langle x|\phi\rangle = \langle x|k_1\rangle = \phi(x) = Ce^{i\alpha}e^{ik_1x} \tag{1}$$

dove con $|k_1\rangle$ si è indicato l-autostato dell'impulso, C è una costante reale di normalizzazione che possiamo fissare convenzionalmente come $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, e α una fase globale inosservabile.

Per il secondo sistema

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\langle x|k_2\rangle + e^{i\beta}\sqrt{2}\langle x|-k_2\rangle = \psi(x) = Ce^{i\alpha}(e^{ik_2x} + \sqrt{2}e^{i\beta}e^{-ik_2x}) \tag{2}$$

dove C è una costante reale di normalizzazione che possiamo fissare convenzionalmente come $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, α una fase globale inosservabile, e β una fase relativa misurabile.

2)

Essendo $|\phi\rangle$ autostato dell'impulso

$$\langle\phi|x|\phi\rangle = 0 \qquad \Delta^2_\phi x = \infty \tag{3}$$

e

$$\frac{1}{\langle\phi|\phi\rangle}\langle\phi|p|\phi\rangle = \hbar k_1 \qquad \Delta^2 p_\phi = 0\ . \tag{4}$$

Notare che è necessario dividere per la normalizzazione in quanto lo stato è normalizzato in senso improprio.

Inoltre

$$\frac{1}{\langle\psi|\psi\rangle}\langle\psi|p|\psi\rangle = \frac{1}{3}\hbar k_2 + \frac{2}{3}(-\hbar k_2) = -\frac{1}{3}\hbar k_2\,, \quad \frac{1}{\langle\psi|\psi\rangle}\langle\psi|p^2|\psi\rangle = \frac{1}{3}(\hbar k_2)^2 + \frac{2}{3}(-\hbar k_2)^2 = (\hbar k_2)^2\,,$$

$$\Delta^2 p_\psi = \frac{8}{9}(\hbar k_2)^2\ . \tag{5}$$

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\langle\psi|x|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\, x}{6\pi}(3+\sqrt{2}e^{-i\beta}e^{2ik_2x}+\sqrt{2}e^{i\beta}e^{-2ik_2x}) \tag{6}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{12i\pi}\frac{d}{dk_2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(e^{-i\beta}e^{2ik_2x}-e^{i\beta}e^{-2ik_2x}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6i\pi}\frac{d}{dk_2}\delta(2k_2)\left(e^{-i\beta}-e^{i\beta}\right)=0\,,$$

dove abbiamo usato la simmetria dell'integrazione, la rappresentazione integrale della delta di Dirac e il fatto che $k_2 \neq 0$ (quindi la delta vale sempre zero). In maniera analoga si può mostrare che

$$\Delta^2 x_\psi = \langle\psi|x^2|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\langle\psi|x^2|x\rangle\langle x|\psi\rangle$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\, x^2}{6\pi}(3+\sqrt{2}e^{-i\beta}e^{2ik_2x}+\sqrt{2}e^{i\beta}e^{-2ik_2x}) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,x^2}{6\pi}3=\infty\,. \tag{7}$$

3)

Nelle regioni $x > 0$ e $x < 0$ l'hamiltoniana è quella di particella libera per cui

$$\varphi_<(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad \text{per} \quad x<0 \tag{8}$$

e

$$\varphi_>(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx} \qquad \text{per} \quad x>0 \tag{9}$$

con A, B, C e D coefficienti complessi, e

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}. \tag{10}$$

Imponendo la continuità della funzione d'onda abbiamo

$$\varphi_<(0) = \varphi_>(0)\ , \tag{11}$$

La condizione sulla (discontinuità della) derivata prima si può ottenere integrando l'equazione agli autovalori

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x) \tag{12}$$

in un intorno infinitesimo di $x = 0$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\varphi''(x)+\kappa\delta(x)\varphi(x)-E\varphi(x)\right)=0\ , \tag{13}$$

da cui

$$\varphi'_>(0) - \varphi'_<(0) = \frac{2m\kappa}{\hbar^2}\varphi(0)\ . \tag{14}$$

Equivalentemente, si può osservare che visto che la derivata seconda nell'origine è proporzionale ad una delta, la derivata prima deve contenere un termine proporzionale ad una theta. Si ha quindi che

$$\varphi'(x) = \lambda\Theta(x) + \varphi'_c(x), \tag{15}$$

dove φ'_c è continua. Differenziando entrambi i membri si ha

$$\varphi''(x) = \lambda\delta(x) + \varphi'_c(x), \tag{16}$$

e quindi, sostituendo nell'equazione Eq. (12)

$$\frac{\hbar^2}{2m}\lambda = \kappa, \tag{17}$$

da cui si ottiene di nuovo la condizione Eq. (14).

4)

Nel caso $\kappa > 0$ non vi sono stati legati, lo spettro è continuo e le autofunzioni sono normalizzabili in modo improprio. Essendo l'hamiltoniana simmetrica per parità ($[H, P] = 0$) ne segue che data un'autofunzione $\varphi(x)$ anche la sua trasformata per parità $\varphi(-x)$ è autofunzione. Pertanto, vi sono due autofunzioni associate ad ogni autovalore e ogni autovalore è doppiamente degenere.

Nel caso $\kappa < 0$, se $E > 0$ valgono le stesse considerazioni del caso precedente. Se invece $E < 0$ deve esistere almeno uno stato legato, normalizzabile in senso proprio. Poiché lo spettro di stati legati nel caso unidimensionale è sempre nondegenere, questo stato deve essere autostato della parità.

5)

$$\langle p|H|\varphi\rangle = \langle p|\left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right)|\varphi\rangle = \langle p|E|\varphi\rangle. \tag{18}$$

Definendo $\tilde{\varphi}(p) \equiv \langle p|\varphi\rangle$ e introducendo una risoluzione dell'identità rispetto agli autostati dell'impulso si ha

$$\left(\frac{p^2}{2m} - E\right)\tilde{\varphi}(p) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\langle p|x\rangle\langle x|V(x)|\varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\kappa\delta(x)\varphi(x) = -\frac{\kappa\varphi(0)}{\sqrt{2\pi\hbar}}. \tag{19}$$

Quindi l'equazione cercata è

$$\tilde{\varphi}(p) = -\frac{2m\kappa}{\sqrt{2\pi\hbar}\,(\hbar^2k^2 - 2mE)}\varphi(0). \tag{20}$$

6)

Se per $x > 0$ vi è solo un'onda progressiva nell'Eq. (9) abbiamo che $D = 0$. Le condizioni di raccordo Eq. (11) e Eq. (14) danno quindi

$$A + B = C \ , \qquad ik(C - A + B) = \frac{2m\kappa}{\hbar^2} C \ , \tag{21}$$

da cui ricaviamo

$$C = A\frac{\hbar^2 k}{\hbar^2 k + im\kappa} \tag{22}$$

$$B = A\frac{-im\kappa}{\hbar^2 k + im\kappa}, \tag{23}$$

dove k è determinato in funzione dell'autovalire di energia E dall'Eq. (10).

In aggiunta a questa soluzione, ve ne è un'altra linearmente indipendente, che possiamo scegliere ad esempio supponendo che nella regione I vi sia solo un'onda regressiva (questo corrisponde alla situazione fisica in cui l'onda incidente arriva da destra). Questa soluzione si ottiene quindi ponendo $A = 0$ nell'Eq. (8). Per ogni autovalore di energia E avremo quindi due autofunzioni linearmente indipendenti, entrambe della forma Eq. (8), che possiamo in particolare scegliere l'una come quella in cui A è arbitrario e B è dato dalla Eq. (22), e l'altra come quella in cui $A = 0$. Ovviamente, esiste semppre una particolare combinazione lineare di queste due autofunzioni che nella regione I coincide con la funzione d'onda Eq. (2). Poiché una combinazione lineare di autofunzioni associate allo stesso autovalore di energia è sempre autofunzione, ne concludiamo che la soluzione cercata esiste sempre.

7)

Verifichiamo che $\psi_0(x)$ sia autofunzione dell'hamiltoniana di particella libera nelle regioni $x < 0$ e $x > 0$:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\psi_0''(x) = \frac{-\hbar^2}{2m} b^2 \psi_0(x) = E\psi_0(x) \tag{24}$$

da cui si ricava

$$E = \frac{-\hbar^2}{2m} b^2 \ . \tag{25}$$

La condizione di continuità della funzione Eq. (11) è manifestamente soddisfatta. Verifichiamo quindi che la condizione di discontinuità Eq. (14) della derivata prima sia soddisfatta:

$$-b\psi_0(0) - b\psi_0(0) = -2b\psi_0(0) = \frac{-2m\kappa}{\hbar^2}\psi_0(0) \tag{26}$$

che può essere soddisfatta scegliendo opportunamente b.

Calcoliamo per prima cosa la funzione d'onda nello spazio degli impulsi

$$\tilde{\psi}_0(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} A e^{-b|x|} = \frac{2Ab}{\sqrt{2\pi}(b^2 + k^2)} \ . \tag{27}$$

Dall'Eq. (20), usando l'espressione Eq. (25) per l'energia, otteniamo quindi

$$A\frac{2m\kappa}{\sqrt{2\pi}\hbar^2\left(k^2+b^2\right)}=\frac{2Ab}{\sqrt{2\pi}\left(k^2+b^2\right)} \tag{28}$$

da cui si ha immediatamente

$$b=\frac{m\kappa}{\hbar^2}\,. \tag{29}$$