Esame Scritto di Fisica Moderna
Traccia di soluzione

20 luglio 2016

1. Calcoliamo i valori medi nello stato

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle\,, \tag{1}$$

degli operatori x, p e H. Iniziamo da x:

$$\begin{aligned}\langle\psi_0|\,x\,|\psi_0\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1| - i\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 2|\right) x \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle\right) \\ &= \frac{1}{3}\langle 1|\,x\,|1\rangle + \frac{2}{3}\langle 2|\,x\,|2\rangle - i\frac{\sqrt{2}}{3}\langle 2|\,x\,|1\rangle + i\frac{\sqrt{2}}{3}\langle 1|\,x\,|2\rangle\,.\end{aligned} \tag{2}$$

Ora $\langle 1|\,x\,|1\rangle = \langle 2|\,x\,|2\rangle = 0$ per parità mentre

$$\langle 2|\,x\,|1\rangle = \int_{-L}^{L}\frac{1}{L}x\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{2L}xdx = \frac{32L}{9\pi^2} \tag{3}$$

$$\langle 1|\,x\,|2\rangle = \int_{-L}^{L}\frac{1}{L}x\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{2L}xdx = \frac{32L}{9\pi^2} \tag{4}$$

risultano essere uguali. Quindi

$$\langle\psi_0|\,x\,|\psi_0\rangle = 0. \tag{5}$$

Passiamo a p:

$$\begin{aligned}\langle\psi_0|\,p\,|\psi_0\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1| - i\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 2|\right) p \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle\right) \\ &= \frac{1}{3}\langle 1|\,p\,|1\rangle + \frac{2}{3}\langle 2|\,p\,|2\rangle - i\frac{\sqrt{2}}{3}\langle 2|\,p\,|1\rangle + i\frac{\sqrt{2}}{3}\langle 1|\,p\,|2\rangle\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Come nel caso di x, $\langle 1|\,p\,|1\rangle = \langle 2|\,p\,|2\rangle = 0$ per parità mentre

$$\langle 2|\,p\,|1\rangle = i\hbar\int_{-L}^{L}\frac{1}{L}\frac{\pi}{2L}\sin\frac{\pi}{L}x\sin\frac{\pi}{2L}xdx = i\hbar\frac{4}{3L} \tag{7}$$

$$\langle 1|\,p\,|2\rangle = -i\hbar\int_{-L}^{L}\frac{1}{L}\frac{\pi}{L}\cos\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{2L}xdx = -i\hbar\frac{4}{3L} \tag{8}$$

risultano essere uguali ma di segno opposto. Quindi

$$\langle\psi_0|\,p\,|\psi_0\rangle = \frac{8\hbar\sqrt{2}}{9L}. \tag{9}$$

Il calcolo del valor medio di H è semplice in quanto $|\psi_0\rangle$ è combinazione lineare di autostati di H stesso. Il risultato è

$$\langle\psi_0|\,H\,|\psi_0\rangle = \frac{1}{3}E_1 + \frac{2}{3}E_2 = \frac{3\pi^2\hbar^2}{8mL^2}. \tag{10}$$

2. Per rispondere a questa domanda utilizziamo la parità delle autofunzioni e dell'operatore x^2. Notiamo innanzitutto che l'operatore ha parità $+$, quindi agendo su uno stato non ne cambia la parità. Inoltre, gli stati $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ sono pari, mentre $|\psi_3\rangle$ è dispari, ossia $\psi_1(x) = \psi_1(-x)$ e $\psi_2(x) = \psi_2(-x)$, mentre $\psi_3(x) = -\psi_3(-x)$. Ne segue immediatamente che che gli elementi di matrice $M_{13} = M_{23} = M_{31} = M_{32} = 0$ in quanto integrali su un dominio pari di una funzione dispari.

   Notiamo inoltre che $M_{12} \neq 0$ perché è la somma di un termine reale $\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 2|x^2|2\rangle$ e di uno immaginario $\frac{i}{\sqrt{2}}\langle 4|x^2|2\rangle$, mentre $M_{ii} \neq 0$ perché possono tutti essere scritti come moduli quadri: ad esempio $\langle\psi_1|x^2|\psi_1\rangle = \langle\psi_1'|x^2|\psi_1'\rangle$ dove $\psi_1' \equiv x|\psi_1\rangle$.
   L'argomento per cui M_{ii} e M_{12} sono diversi da zero non è necessario per ottenere punteggio pieno

3. *Domanda di Teoria*: L'argomento è dato nella sezione 7.1.1 delle dispense disponibili all'indirizzo
   `http://wwwteor.mi.infn.it/ forte/mq/testo/mq.pdf`

4. Il valor medio che vogliamo calcolare è ora il seguente

$$\langle\psi_0\,(t)|\,p\,|\psi_0\,(t)\rangle \tag{11}$$

   dove abbiamo utilizzato la rappresentazione di Schrödinger. Conviene usare quest'ultima come sempre quando lo stato $|\psi_0\rangle$ al tempo $t = 0$ è combinazione lineare di autostati dell'Hamiltoniana.

   È quindi immediato scrivere l'espressione di questo stato ad un tempo t

$$|\psi_0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + i\sqrt{\frac{2}{3}}\,|2\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}. \tag{12}$$

   Il valor medio al tempo t è dunque

$$\begin{aligned}\langle\psi_0\,(t)|\,p\,|\psi_0\,(t)\rangle &= \langle 1|\,p\,|2\rangle\,\frac{i\sqrt{2}}{3}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t} - \langle 2|\,p\,|1\rangle\,\frac{i\sqrt{2}}{3}e^{\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t} \\ &= \frac{8\hbar\sqrt{2}}{9L}\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right) = \frac{8\hbar\sqrt{2}}{9L}\cos\left(\frac{3\pi^2\hbar}{8mL^2}t\right)\end{aligned} \tag{13}$$

   dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato i risultati dell'Eq. (7) e (8).

5. Il nuovo potenziale V_1 corrisponde a dimezzare la buca. Le condizioni al contorno che devono essere soddisfatte dalla funzione d'onda per essere autofunzione dell'hamiltoniana in presenza del potenziale v_1 sono

$$\psi\,(L) = 0; \qquad \psi\,(0) = 0. \tag{14}$$

   Mentre la prima condizione è soddisfatta da tutte le autofunzioni che avevamo per $t < 0$ la seconda condizione è soddisfatta solo dalle autofunzioni con n pari. Quindi le nuove autofunzioni sono

$$\langle x|n'\rangle = \psi_{n'}\,(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n'\pi}{2L}x \qquad \text{con } n' \text{ pari} \tag{15}$$

   dove è bene notare che la normalizzazione è stata ricalcolata in quanto l'intervallo d'integrazione risulta ora dimezzato.

   Lo spettro di energia è quindi ora

$$E_n' = \frac{n'^2\hbar^2\pi^2}{8mL^2} \qquad \text{con } n' \text{ pari.} \tag{16}$$

Questo spettro è identico a quello che si avrebbe in una buca centrata nell'origine ma con semilarghezza $\frac{L}{2}$ invece che L. Infatti con una larghezza dimezzata avremmo il seguente spettro

$$E_k = \frac{k^2 \hbar^2 \pi^2}{8m \left(\frac{L}{2}\right)^2} \tag{17}$$

ma notando che ogni numero pari $n' = 2k$ con k intero possiamo riottenere da $E_{n'}$ dell'Eq. (16) esattamente lo stesso spettro appena scritto in Eq. (17).

6. Dopo la misura il sistema si trova nello stato

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{1}{L}} \cos \frac{\pi}{2L} x, \tag{18}$$

ora le ampiezze di transizione che vogliamo calcolare sono le seguenti

$$c_n(t) = \langle n'(t)|1\rangle = \langle n'|S(t)|1\rangle \exp - \left(\frac{i}{\hbar} E'_n\right) c_n(0) \tag{19}$$

dove E'_n e gli stati $|n'\rangle$ sono rispettivamente le energie Eq. (16) e gli autostati Eq. (15) per $t > 0$ mentre $|1\rangle$ è lo stato fondamentale dell'hamiltoniana per $t = 0$. Notare che $S(t)$ è l'operatore di evoluzione temporale scritto in termini della hamiltoniana a $t > 0$, quindi esso va fatto agire a sinistra in quanto lo stato $|1\rangle$ non è autostato di tale hamiltoniana. *Nota:* La notazione adottata nel testo potrebbe suggerire che con $\langle n'(t)|1\rangle$ si intenda $\langle n'|S^\dagger(t)|1\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar}E'_n\right)\langle n'|1\rangle$. Viene dato punteggio pieno qualunque sia il segno della fase.

Esplicitando il prodotto scalare come integrale sulle funzioni d'onda troviamo

$$\begin{aligned} c_n(0) &= \frac{\sqrt{2}}{L} \int_0^L dx \, \sin \frac{n'\pi}{2L} x \cos \frac{\pi}{2L} x \\ &= \frac{\sqrt{2}}{L} \int_0^L dx \, \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{(n'+1)\pi}{2L} x\right) + \sin\left(\frac{(n'-1)\pi}{2L} x\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\frac{1}{n'+1} + \frac{1}{n'-1}\right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{2n'}{(n'^2 - 1)} \end{aligned} \tag{20}$$

dove, nel secondo passaggio, abbiamo utilizzato la formula di Werner data nel suggerimento. *La normalizzazione dello stato Eq. (18) è ambigua e verrà discussa al punto seguente. In questa domanda viene dato punteggio pieno qualunque sia la scelta di normalizzazione fatta.*

7. Per calcolare ora la somma dei moduli quadri poniamo innanzitutto $n' = 2k$, sfruttando il fatto che n' deve essere pari (cfr. Eq. (15). La somma è quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2} \frac{16k^2}{(4k^2-1)^2}. \tag{21}$$

Per calcolarla usiamo i risultati proposti nel testo: riscriviamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2} \frac{k^2}{\left(k^2 - \frac{1}{4}\right)^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2} \left[\frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \frac{1}{\left(k^2 - \frac{1}{4}\right)^2}\right] \\ &= \frac{2}{\pi^2} \left[2 - 2 + \frac{\pi^2}{4}\right] = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{22}$$

La somma cercata, con la normalizzazione Eq. (18) è quindi $\frac{1}{2}$ e non 1 come uno avrebbe potuto aspettarsi. Questo è dovuto al fatto che lo stato $|1\rangle$ è stato normalizzato nello spazio di Hilbert corrispondente ad una buca di larghezza $2L$, mentre gli elementi di matrice c_n Eq. (20) sono stati calcolati nello spazio di Hilbert corrispondente ad una buca di larghezza L. La probabilità che un sistema che si trova in uno stato $|\psi\rangle$ venga rivelato in ciascuno degli stati possibili $|e_i\rangle$ è $P_i = |\langle e_i|\psi\rangle|^2$ (si veda la sezione 2.4 delle dispense del corso). Ovviamente, la probabilità relativa di un evento si ottiene normalizzando alla probabilità di tutti gli eventi possibili: $\sum_i P_i$. Questa normalizzazione nel nostro caso è pari a $\frac{1}{2}$ secondo la Eq. (22), e corrisponde a ricalcolare la normalizzazione dello stato $|1\rangle$ nel nuovo spazio di Hilbert.