Scritto di fisica moderna - 25 settembre 2014

Traccia di soluzione

Esercizio 1. L'equazione del moto alla Heisenberg è data da

$$\frac{da}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_0, a] = -i\omega a, \tag{1}$$

che ha come soluzione

$$a(t) = e^{-i\omega t}a, \quad a^\dagger(t) = e^{i\omega t}a^\dagger \tag{2}$$

dove $a(0) = a_S$. Quindi il commutatore è

$$\left[a(t), a^\dagger(t')\right] = \left[e^{-i\omega t}a, e^{i\omega t'}a^\dagger\right] = e^{-i\omega(t-t')} \tag{3}$$

Esercizio 2. La funzione $|\psi(t)\rangle$ al tempo t è

$$|\psi(t)\rangle = S(t)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}S(t)\left(1 + a^\dagger\right)|0\rangle, \tag{4}$$

dove $S(t)$ è l'operatore di evoluzione temporale. Si ha

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + S(t)a^\dagger S^{-1}(t)\right)S(t)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + a^\dagger(-t)\right)e^{-\frac{i}{\hbar}E_0}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_0}\left(|0\rangle + e^{-i\omega t}|1\rangle\right), \tag{5}$$

dove abbiamo ricordato che $a(t) = S^{-1}(t)aS(t)$, abbiamo usato la Eq. (2) e E_0 è l'energia dello stato $|0\rangle$.

La probabilità è data da

$$\begin{aligned} P(t) &= |\langle\phi|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left|\left(\langle 0| - \langle 1|\right)\left(|0\rangle + e^{-i\omega t}|1\rangle\right)\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left|1 - e^{-i\omega t}\right|^2 = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(\omega t)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Metodo alternativo: La funzione $|\psi(t)\rangle$ si scrive

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}|0\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|1\rangle\right), \tag{7}$$

dove $E_0 = \hbar\omega/2$ e $E_1 = 3\hbar\omega/2$. La probabilità è data da

$$\begin{aligned} P(t) &= |\langle\phi|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left|\left(\langle 0| - \langle 1|\right)\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}|0\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|1\rangle\right)\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{t}{\hbar}\left(E_0 - E_1\right)\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(\omega t)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Esercizio 3. L'indeterminazione è definita come

$$\Delta^2 x(t) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \tag{9}$$

Calcoliamo i due contributi

$$\begin{aligned}
\langle \psi(t)|x|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\langle 0| + e^{-i\omega t}\langle 1|\right)\left(a + a^\dagger\right)\left(|0\rangle + e^{i\omega t}|1\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos\omega t,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\langle \psi(t)|x^2|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{4m\omega}\left(\langle 0| + e^{-i\omega t}\langle 1|\right)\left(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a\right)\left(|0\rangle + e^{i\omega t}|1\rangle\right) = \frac{\hbar}{m\omega}. \tag{11}$$

Infine, combinando le espressioni otteniamo

$$\Delta^2 x(t) = \frac{\hbar}{m\omega}\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2\omega t\right). \tag{12}$$

Esercizio 4. Per il principio d'indeterminazione abbiamo

$$\Delta^2 x(t)\Delta^2 p(t') \geq \frac{1}{4}\left|\langle [x(t), p(t')]\rangle\right|^2. \tag{13}$$

Calcoliamo il commutatore

$$\begin{aligned}
[x(t), p(t')] &= -\frac{i\hbar}{2}\left[a(t) + a^\dagger(t), a(t') - a^\dagger(t')\right] \\
&= \frac{i\hbar}{2}\left(\left[a(t), a^\dagger(t')\right] + \left[a(t'), a^\dagger(t)\right]\right) \\
&= i\hbar\cos\left(\omega(t - t')\right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Per il principio d'indeterminazione si ha

$$\Delta^2 p \geq \frac{\hbar^2\cos^2\left(\omega(t - t')\right)}{4\Delta^2 x}. \tag{15}$$

Dopo la prima misura, il sistema si trova in un autostato della posizione e quindi $\Delta^2 x(t) = 0$. Pertanto l'indeterminazione minima di una misura di impulso è

$$\begin{cases} \Delta^2 p \geq 0 & \text{per } t' - t = \omega^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ \Delta^2 p = \infty & \text{per } \Delta^2 x = 0 \end{cases}. \tag{16}$$

Esercizio 5. L'hamiltoniana $H(t)$ è data da

$$\begin{cases} H(t \leq 0) = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \\ H(t > 0) = \hbar\omega\left(\bar{a}^\dagger \bar{a} + \frac{1}{2}\right) - \hbar\omega\kappa^2 \end{cases}, \tag{17}$$

con $\bar{a} = a + \kappa$, e

$$\kappa = -\frac{F(t)}{\omega\sqrt{2\hbar\omega m}}. \tag{18}$$

È facile verificare che gli operatori $\bar{a}$ soddisfano le medesime relazioni di commutazione degli operatori a, $a^\dagger$. Ne segue quindi che lo spettro dell'operatore $\bar{a}^\dagger\bar{a}$ è il consueto spettro dell'operatore numero, e quindi lo spettro degli autovalori di H è

$$\begin{cases} E(t \leq 0) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ E(t > 0) = E(t \leq 0) - \hbar\omega\kappa^2 \end{cases} \tag{19}$$

Esercizio 6. L'equazione del moto alla Heisenberg è

$$\frac{da}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[H(t), a\right] = -i\omega a + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} F(t) \tag{20}$$

che ammette come soluzione

$$a(t) = e^{-i\omega t}\left(a + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\int_{-\infty}^{t} F(t')e^{i\omega t'}dt'\right) \tag{21}$$

Usando la forma esplicita di $F(t)$ si trova facilmente

$$\begin{cases} a(t) = e^{-i\omega t} a & \text{per } t \leq 0 \\ a(t) = e^{-i\omega t}\left(a + \beta\right) & \text{per } t > 0 \end{cases}, \tag{22}$$

con

$$\beta = \frac{i\lambda}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\int_{0}^{t} e^{-t'(1-i\omega)}dt' = \frac{\lambda(i+\omega)}{(\omega^2+1)\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(1 - e^{-t(1-i\omega)}\right) \tag{23}$$

Possiamo ora calcolare la probabilità di transizione notando che lo spettro dell'hamiltoniana a $t \to \infty$ è lo stesso di quello dell'hamiltoniana a $t < 0$ perché $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$. Pertanto

$$P = |\langle 1(t)|S(t,t_0)|0(t_0)\rangle|^2 = |\langle 0|aS|0\rangle|^2 = |\langle 0|SS^{-1}aS|0\rangle|^2 = |\langle 0(t)|S(t,t_0)a(t)|0(t_0)\rangle|^2 = |\langle 0(t_0)|a(t)|0(t_0)\rangle|^2$$
$$|\beta_{t\to\infty}|^2 = \left|\tfrac{i\lambda}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\int_0^\infty e^{-t'(1-i\omega)}dt'\right|^2 = \tfrac{\lambda^2}{2\hbar\omega m(1+\omega^2)}, \tag{24}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $|0(t)\rangle = S^{-1}(t,t_0)|0(t_0)\rangle$ ed abbiamo utilizzato la Eq. (20).