Esame Scritto di Fisica Moderna
Traccia di soluzione

15 Settembre 2016

1. Calcoliamo i valori medi degli operatori x e p nello stato avente funzione d'onda

$$\psi\left(x\right) = \sqrt{\alpha}e^{-\alpha|x|}e^{ikx}. \tag{1}$$

Troviamo

$$\left\langle\psi\right| x \left|\psi\right\rangle = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x e^{-2\alpha|x|} = 0 \qquad \text{per parità.} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\left\langle\psi\right| p \left|\psi\right\rangle &= \alpha \int_{-\infty}^{0} dx\, e^{\alpha x}e^{-ikx}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)e^{(\alpha+ik)x} + \alpha\int_{0}^{+\infty} dx\, e^{-\alpha x}e^{-ikx}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)e^{(-\alpha+ik)x} \\ &= -i\hbar\alpha\left(\left(\alpha+ik\right)\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{2\alpha x} + \left(-\alpha+ik\right)\int_{0}^{-\infty} dx\, e^{-2\alpha x}\right) = \hbar k\end{aligned} \tag{3}$$

2. Per trovare il valore degli stessi valor medi per ogni tempo t utilizziamo le equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[H, x\right] = \frac{p}{m} \tag{4}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[H, p\right] = 0 \tag{5}$$

dove abbiamo utilizzato l'hamiltoniana di particella libera

$$H = \frac{p^2}{2m}. \tag{6}$$

Risolvendo l'equazione differenziale otteniamo

$$p\left(t\right) = p\left(0\right) = p \tag{7}$$

$$x\left(t\right) = x\left(0\right) + \frac{p\left(0\right)}{m}t = x + \frac{p}{m}t \tag{8}$$

per gli operatori in funzione del tempo e

$$\left\langle p\left(t\right)\right\rangle = \left\langle p\right\rangle = \hbar k, \tag{9}$$

$$\left\langle x\left(t\right)\right\rangle = \left\langle x\right\rangle + \frac{\left\langle p\right\rangle}{m}t = \frac{\hbar k}{m}t \tag{10}$$

per i loro valori medi.

3. Sfruttando l'hermitianità di p abbiamo

$$\langle\phi|\phi\rangle = \langle\psi|p^{\dagger}p|\psi\rangle = \langle\psi|p^2|\psi\rangle = \langle p^2\rangle. \tag{11}$$

Possiamo ora calcolare l'indeterminazione su p. Iniziamo valutando il valore medio di p^2. Sfruttando l'Eq. (11) si trova

$$\begin{aligned}
\langle\phi| p^2 |\phi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)\right)^* \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)\right) \\
&= \alpha\left(\int_{-\infty}^{0} \left(-i\hbar(\alpha+ik)e^{(\alpha+ik)x}\right)^* \left(-i\hbar(\alpha+ik)e^{(\alpha+ik)x}\right)\right. \\
&+ \left.\int_{0}^{+\infty} \left(-i\hbar(-\alpha+ik)e^{(-\alpha+ik)x}\right)^* \left(-i\hbar(-\alpha+ik)e^{(-\alpha+ik)x}\right)\right) \\
&= \alpha\hbar^2\left(\alpha^2+k^2\right)\left(\int_{-\infty}^{0} dx e^{2\alpha x} + \int_{0}^{+\infty} dx e^{-2\alpha x}\right) = \hbar^2\left(\alpha^2+k^2\right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Sfruttando il valore medio di p calcolato al punto 1, Eq. (3), possiamo calcolare l'indeterminazione su p:

$$\Delta^2 p = \hbar^2\alpha^2. \tag{13}$$

4. Vogliamo ora calcolare l'indeterminazione sulla posizione e verificare la relazione di indeterminazione di Heisenberg. Per prima cosa calcoliamo il valore medio di x^2

$$\begin{aligned}
\langle\psi| x^2 |\psi\rangle &= \alpha\left(\int_{-\infty}^{0} dx\, x^2 e^{2\alpha x} + \int_{0}^{+\infty} dx\, x^2 e^{-2\alpha x}\right) \\
&= \alpha\,\frac{1}{4}\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{2\alpha x} + \int_{0}^{+\infty} dx\, e^{-2\alpha x}\right) \\
&= \alpha\,\frac{1}{4}\frac{d^2}{d\alpha^2}\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha^2}
\end{aligned} \tag{14}$$

dove abbiamo utilizzato l'uguaglianza

$$x^2 e^{\pm 2\alpha x} = \frac{1}{4}\frac{d^2}{d\alpha^2}e^{\pm 2\alpha x}. \tag{15}$$

Poichè nello stato ψ si ha $\langle x\rangle = 0$, valor medio di x^2 appena trovato è uguale all'indeterminazione $\Delta^2 x$:

$$\Delta^2 x = \frac{1}{2\alpha^2}. \tag{16}$$

Il prodotto delle indeterminazioni è quindi

$$\Delta^2 x \Delta^2 p = \frac{\hbar^2}{2} > \frac{\hbar^2}{4}. \tag{17}$$

La relazione di indeterminazione di Hesienberg è quindi verificata, ma lo stato dato non è di minima indeterminazione: infatti, non si tratta di un pacchetto gaussiano.

Nel limite $\alpha \to \infty$ abbiamo $\Delta^2 x = 0$ mentre l'indeterminazione su p cresce all'infinito in modo che la disuguaglianza data dalla relazione di indeterminazione resti soddisfatta. Notiamo che in questo limite la funzione d'onda data Eq. (1) diventa proporzionale a una $\delta(0)$ (autostato della posizione).

Osserviamo che il calcolo di $\langle p^2\rangle$ si può anche eseguire facendo agire p^2 sullo stato dato, ma risulta in tal caso più difficile. Per completezza diamo anche questo calcolo (non richiesto). Per eseguire il calcolo in questo modo, è necessario tenere conto del fatto che, in seguito alla presenza del valore assoluto all'esponente, la funzione d'onda data ha derivata prima discontinua nell'origine. Riscriviamo quindi la funzione d'onda come

$$\psi(x) = \sqrt{\alpha}\left(e^{(\alpha+ik)x}\left(1-\Theta(x)\right) + e^{(-\alpha+ik)x}\Theta(x)\right), \tag{18}$$

dove Θ è la funzione a gradino di Heaviside.

Calcoliando il valore medio di p^2 come

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x) \left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi(x), \tag{19}$$

la derivata seconda dell'Eq. (18) risulta essere

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\alpha}\left((\alpha+ik)\, e^{(\alpha+ik)x}(1-\Theta(x)) + (-\alpha+ik)\, e^{(-\alpha+ik)x}\Theta(x)\right) + \sqrt{\alpha}\,(-\delta(x)+\delta(x))\right) \\ &= \sqrt{\alpha}\left((\alpha+ik)^2 e^{(\alpha+ik)x}(1-\Theta(x)) + (-\alpha+ik)^2 e^{(-\alpha+ik)x}\Theta(x) - 2\alpha\delta(x))\right),\end{aligned} \tag{20}$$

che inserita nell'integrale dà

$$\begin{aligned}\langle p^2 \rangle &= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{0} dx\, \alpha\,(\alpha+ik)^2 e^{2\alpha x} - \hbar^2 \int_{0}^{+\infty} dx\, \alpha\,(-\alpha+ik)\, e^{-2\alpha x} + 2\hbar^2\alpha^2 \\ &= \hbar^2\left(k^2-\alpha^2\right) + 2\hbar^2\alpha^2 = \hbar^2\left(k^2+\alpha^2\right)\end{aligned} \tag{21}$$

come nel caso precedente.

5. Si veda la sezione 5.3.2 delle dispense.

6. Per confrontare le varie relazioni di indeterminazione calcoliamo i commutatori corrispondenti. Nel caso (a) abbiamo

$$[x(t), p(t)] = i\hbar \tag{22}$$

da cui

$$\Delta^2 x \Delta^2 p \geq \frac{\hbar^2}{4}, \tag{23}$$

e quindi per lo stato dato, usando l'espressione Eq. (13) per l'indeterminazione in impulso la disuguaglianza che $\Delta^2 x(t)$ deve soddisfare è

$$\Delta^2 x(t) \geq \frac{1}{4\alpha^2}. \tag{24}$$

Questo risultato vale anche per il caso (c) perché p è una costante del moto e quindi $p(t) = p(0)$.

Nel caso (b) abbiamo invece

$$[x(t), x(0)] = [x(0), x(0)] + \frac{t}{m}[p(0), x(0)] = -\frac{i\hbar t}{m}, \tag{25}$$

e quindi la disuguaglianza per lo stato dato è

$$\Delta^2 x(t) \geq \frac{\alpha^2\hbar^2 t^2}{2m^2}. \tag{26}$$

Risulta pertanto più restrittive la disuguaglianza Eq. (22) (posizione al tempo t e impulso a un tempo qualunque) quando $|t| < t_0$ con

$$t_0 = \frac{m}{\sqrt{2}\hbar\alpha^2}, \tag{27}$$

e più restrittiva la disuguaglianza Eq. (22) (posizione al tempo t e posizione al tempo $t = 0$) quando $|t| > t_0$.

7. L'hamiltoniana data è quella di particella libera per ogni $x \neq 0$. Quando $x = 0$ l'equazione agli autovalori per l'hamiltoniana impone che la derivata seconda della funzione d'onda contenga un termine proporzionale ad una delta di Dirac, e quindi che la derivata prima sia discontinua. La condizione di discontinuità della derivata è

$$\Delta\psi'(x) = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(0) \tag{28}$$

che per la funzione d'onda e data implica

$$-2\alpha^2 = -\frac{2m\lambda\alpha}{\hbar^2}. \tag{29}$$

Pertanto la funzione d'onda data con $k = 0$ è autostato dell'hamiltoniana solo se

$$\lambda = \frac{\alpha\hbar^2}{m}. \tag{30}$$

Essa è un'autofunzione di particella libera quando $E < 0$, con

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} \tag{31}$$

quindi in tal caso la funzione d'onda è autostato dell'hamiltoniana, e l'autovalore di energia è

$$E = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}. \tag{32}$$

8. La probabilità di transizione richiesta è data da

$$P = \left|\langle\psi|\bar{\psi}\rangle\right|^2 \tag{33}$$

con $\langle x|\psi\rangle = \sqrt{\alpha}e^{-\alpha|x|}e^{ikx}$ e $\langle x|\bar{\psi}\rangle = \sqrt{\alpha}e^{-\alpha|x|}$.
Separando l'integrale tra $-\infty$ e 0 e tra 0 e $+\infty$ otteniamo

$$\begin{aligned}\langle\psi|\bar{\psi}\rangle &= \alpha\left(\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{(2\alpha-ik)x} + \int_{0}^{+\infty} dx\, e^{(-2\alpha-ik)x}\right)\\ &= \alpha\left(\frac{1}{2\alpha-ik} + \frac{1}{2\alpha+ik}\right) = \frac{4\alpha^2}{4\alpha^2-k^2} = \frac{1}{1-\frac{k^2}{4\alpha^2}}\end{aligned} \tag{34}$$

il cui modulo quadrato dà la probabilità cercata secondo la Eq. (33). Nel limite $\alpha \to \infty$ i due stati concidono e si ha $\lim \alpha \to \infty P = 1$.