Esame di Fisica Moderna: Soluzioni

28 novembre 2008

1. **Valori medi**

La funzione d'onda data è pari: $\psi(x) = \psi(-x)$. Ne segue immediatamente che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x|\psi(x)|^2 = 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^\star(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \psi(x) = 0 \tag{1}$$

dal momento che, in entrambi i casi, l'integrando è il prodotto di una funzione pari per una dispari su un dominio simmetrico.

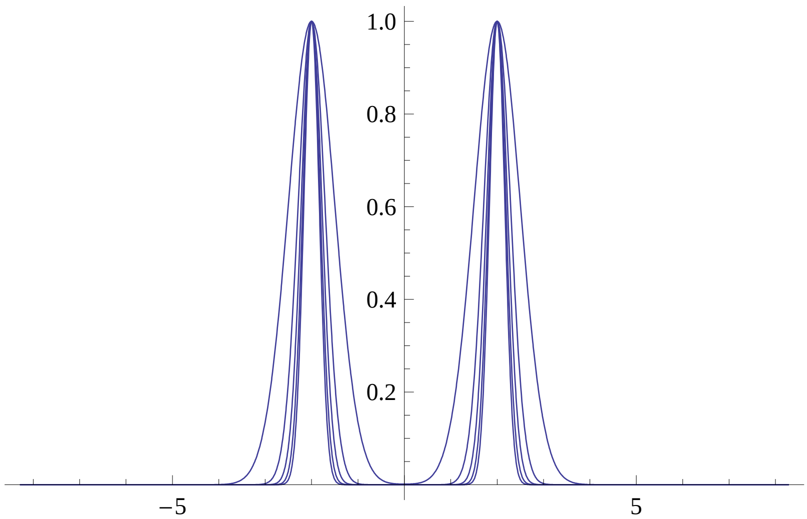

Figure 1: Rappresentazione della densità di probabilità $|\psi(x)|^2$ per vari valori di α.

La funzione d'onda data

$$\langle x|\psi\rangle = N\left(e^{ikx}e^{-\frac{\alpha}{2}(x+x_0)^2} + e^{-ikx}e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2}\right) \tag{2}$$

è la sovrapposizione di due pacchetti d'onda, il primo con valor medio della posizione $< x >= -x_0$ e con con valor medio dell'impulso $< p >= \hbar k$, ed il secondo con valor medio della posizione $< x >= x_0$ e con con valor medio dell'impulso $< p >= -\hbar k$, o, equivalentemente, la sovrapposizione di due pacchetti centrati rispettivamente in $< x >= -x_0$ nello spazio delle posizioni e in $< p >= \hbar k$

nello spazio degli impulsi, e in $< x >= x_0$ nello spazio delle posizioni e in $< p >= -\hbar k$ nello spazio degli impulsi.

La densità di probabilità $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ corrispondente a questo stato è mostrata in Fig. 1.

2. **Indeterminazione**

Calcoliamo le indeterminazioni di posizione e impulso:

$$\begin{aligned} \langle(\Delta x)^2\rangle &= \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \\ \langle(\Delta p)^2\rangle &= \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Nel caso in cui $x_0 = 0$ l'eq. (2) assume la forma:

$$\psi(x) = N\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} = 2N\cos(kx)e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}. \tag{4}$$

In questo caso la funzione d'onda è la sovrapposizione di due pacchetti d'onda con impulsi opposti, ma entrambi centrati nell'origine. La funzione d'onda corrispondente è mostrata in Fig. 2.

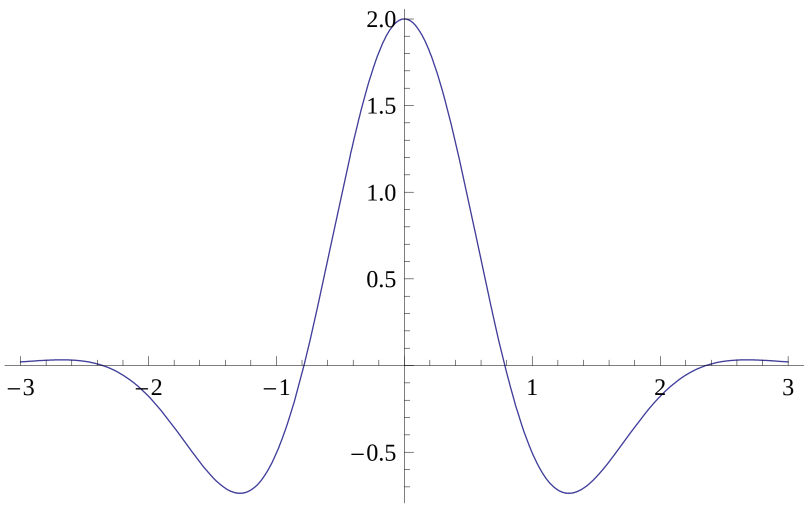

Figure 2: La funzione d'onda $\psi(x)$ Eq. (4).

Dalla condizione di normalizzazione $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ otteniamo il valore della costante N:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, 4\cos^2(kx)e^{-\alpha x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (2 + e^{2ikx} + e^{-2ikx})e^{-\alpha x^2} = \\ &= 2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}(1 + e^{-\frac{k^2}{\alpha}}) \end{aligned} \tag{5}$$

dal momento che i valori medi di posizione e impulso sono entrambi nulli si ha:

$$\begin{aligned}
\langle(\Delta x)^2\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2|\psi(x)|^2 = N^2\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2(2+e^{2ikx}+e^{-2ikx})\, e^{-\alpha x^2} = \\
&= 2N^2\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{k^2}{\alpha}\right)e^{-\frac{k^2}{\alpha}}\right] = \frac{1}{2\alpha}-\frac{k^2}{\alpha^2}\frac{1}{1+e^{k^2/\alpha}} \qquad (6)\\
\langle(\Delta p)^2\rangle &= -\hbar^2\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}dx = \\
&= -2\hbar^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}|\psi(x)|^2\left(\alpha^2x^2-k^2\right)-2|N|^2 i\alpha kx\left(e^{2ikx}-e^{-2ikx}\right)e^{-\alpha\frac{x^2}{2}} = \\
&= 2N^2\hbar^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left[k^2+\frac{\alpha}{2}(1+e^{-\frac{k^2}{\alpha}}\right] = \hbar^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{k^2}{1+e^{-\frac{k^2}{\alpha}}}\right) \qquad (7)
\end{aligned}$$

Lo stato non può essere uno stato di minima indeterminazione, in quanto è la sovrapposizione di due pacchetti d'onde diversi, mentre solo i pacchetti d'ond con fissi $\langle x\rangle$ e $\langle k\rangle$ sono stati di minima indeterminazione.

Questo può essere verificato con il calcolo esplicito (non richiesto dal testo di esame): il prodotto delle indeterminazioni di posizione e impulso è

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(1+2y\frac{2\sinh y}{1+\cosh y}-y^2\frac{1}{1+\cosh y}\right) \qquad (8)$$

dove $y = k^2/\alpha$. Si vede che il fattore fra parentesi tonde è sempre maggiore di uno, e quindi lo stato non è di indeterminazione minima.

3. **Densità di probabilità**a

   Quando $\alpha = 0$ i due pacchetti d'onda di cui $\psi(x)$ è sovrapposizione si riducono a due onde piane, di impulso $\hbar k$ e $-\hbar k$ rispettivamente. La densità di probabilità di posizione al tempo $t = 0$ è data da

   $$\rho(x) = |\psi(x)|^2 = |N|^2\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right)|^2 = 4|N|^2\cos^2(kx). \qquad (9)$$

   Al tempo t si ha

   $$\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2k^2}{2m}t}\psi(x): \qquad (10)$$

   infatti le due onde piane di impulso $\pm\hbar k$ sono autostati di energia aventi la stessa energia $E_k = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$. Perciò lo stato dato è anch'esso un autostato di energia. Utilizzando la eq. (10) si vede immediatamente che $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = \rho(x)$ è indipendente dal tempo e data dalla eq. (9) a tutti i tempi.

   Nel caso $\alpha \neq 0$ lo stato $\psi(x)$ non è più un autostato di energia. La sua dipendenza dal tempo si trova sviluppandolo su una base di autostati di energia, ossia di onde piane $|p\rangle$:

   $$\psi(x,t) = \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle = \int dp\,\langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}}|p\rangle\langle p|\psi\rangle = \int\frac{dp}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t+ipx}\psi(p) \qquad (11)$$

4. **Misure di impulso**

   Quando $\alpha \to 0$, come si è visto al punto, precedente il sistema è la sovrapposizione di due autostati dell'impulso

   $$\lim_{\alpha\to 0}|\psi\rangle = N((|k\rangle+|-k\rangle), \qquad (12)$$

   dove N è una normalizzazione oppportuna. Pertanto se si effettua una misura di impulso i possibili risultati della misura sono $\pm\hbar k$, ciascuno con probabilità $P = \frac{1}{2}$.

Quando $\alpha = 0$ esattamente, gli stati non sono normalizzabili in senso proprio, ma solo nel senso della delta di Dirac. In tal caso, gli stati $|k\rangle$ soddisfano la condizione di normalizzazione $\langle k|k'\rangle = \delta(k-k')$. La costante di normalizzazione si trova quindi scrivendo lo stato $|\psi\rangle$ come una sovrapposizione equiprobabile di onde piane

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|k\rangle + |-k\rangle) \tag{13}$$

e imponendo la condizione di normalizzazione data prima

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipx}. \tag{14}$$

Si ha così

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \tag{15}$$

da cui $N = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

In questo caso non si può parlare di probabilità di misura dell'impulso, ma solo di densità di probabilità.

5. **Evoluzione temporale**

Il valor medio della posizione al tempo t si determina facilmente in termini di quello al tempo $t = 0$ usando la rappresentazione di Heisenberg. Le equazioni del moto per gli operatori posizione ed impulso in rappresentazione di Heisenberg sono

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}\left(p[p,x] + [p,x]p\right) = \frac{p}{m} \tag{16}$$

$$\frac{dp}{dt} = 0 \tag{17}$$

per una particella libera, e

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \tag{18}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{i}{\hbar}[-\kappa x, p] = \kappa \tag{19}$$

per un potenziale lineare.

Le soluzioni per l'evoluzione temporale dell'operatore posizione, che coincidono con le leggi del moto classiche, sono

$$p(t) = p(0) \tag{20}$$

$$x(t) = \frac{p}{m}t + x(0) \tag{21}$$

per la particella libera e

$$p(t) = p(0) + \kappa t \tag{22}$$

$$x(t) = \frac{1}{2m}\kappa t^2 + \frac{p(0)}{m}t + x(0) \tag{23}$$

per il potenziale lineare (moto uniformemente accelerato). Ovviamente i valori medi della posizione soddisfano le corrispondenti leggi di evoluzione

$$\langle x(t)\rangle = \frac{\langle p\rangle}{m}t + \langle x(0)\rangle \tag{24}$$

$$\langle x(t)\rangle = \frac{1}{2m}\kappa t^2 + \frac{\langle p(0)\rangle}{m}t + \langle x(0)\rangle \tag{25}$$

rispettivamente, nei casi libero e uniformemente accelerato.

Lo stato dato è una sovrapposizione di due stati, aventi rispettivamente, come discusso al punto (1), $\langle p \rangle = \hbar k$ e $\langle x \rangle = -x_0$ il primo, e $\langle p \rangle = -\hbar k$ e $\langle x \rangle = x_0$ il secondo. Nel limite $\alpha \to 0$ una misura di impulso, come discusso al punto precedente, può dare risultati $p = \pm\hbar k$. Dopo la misura il sistema si trova in un autostato dell'impulso, in cui $\langle p \rangle = \pm\hbar k$ e $\langle x \rangle = 0$. (Risposta ugualmente accettabile: se la misura di impulso ha accuratezza inferiore ad α, qualora la misura dia come risultato $p = \hbar k$ il sistema dopo la misura si trova nello stato $\psi(x) = \lim_{\alpha\to 0} N \left(e^{ikx} e^{-\frac{\alpha}{2}(x+x_0)^2}\right)$ e se il risultato della misura di impulso è $-\hbar k$ il sistema si trova nello stato $\psi(x) = \lim_{\alpha\to 0} N \left(e^{-ikx} e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2}\right)$; al tempo $t = 0$, nel primo caso $\langle p \rangle = \hbar k$ e $\langle x \rangle = -x_0$, mentre nel secondo caso $\langle p \rangle = -\hbar k$ e $\langle x \rangle = x_0$.) Il valor medio della posizione a qualunque tempo t si ottiene sostituendo queste condizioni iniziali nelle leggi di evoluzione temporale eq. (-).

Nel caso libero, p non dipende dal tempo (cfr. eq. (20)), pertanto il suo valor medio e la sua indeterminazione non dipendono dal tempo. Nel caso di potenziale costante, usando la eq. (22) si ha

$$\begin{aligned} \Delta p(t) &= \langle p(t)^2 \rangle - (\langle p(t) \rangle)^2 \\ &= \langle (p(0) + \kappa t)^2 \rangle - (\langle p(0) + \kappa t \rangle)^2 \\ &= \langle p(0)^2 \rangle - \langle p(0) \rangle^2. \end{aligned} \tag{26}$$

Pertanto, anche in questo caso l'indeterminazione non dipende dal tempo.

Ne segue che in entrambi i casi l'indeterminazione in impulso dopo la misura è nulla, e resta nulla a tempi successivi.