Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA I del 23 gennaio 2025

(1) Partiamo con il caso A=1 e B=0. In questo caso avremo che il valore medio dell'operatore impulso $\hat{p}$ nello stato $|\psi\rangle$ è, introducendo una risoluzione dell'identità in p:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\langle\psi|p\rangle\langle p|\hat{p}|\psi\rangle dp = \int_{-\infty}^{+\infty} p|\psi(p)|^2 dp = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty} p\ e^{-\frac{(p-p_0)^2}{\sigma}}dp = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}\left[\sigma\int_{-\infty}^{+\infty} p'\ e^{-p'^2}dp' + \sqrt{\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} p_0\ e^{-p'^2}dp'\right] = \frac{\sqrt{\pi\sigma}}{\sqrt{\pi\sigma}}p_0 = p_0\end{aligned} \tag{1}$$

dove abbiamo utilizzato il cambio di variabile $p' \equiv \frac{p-p_0}{\sqrt{\sigma}}$, il fatto che nella seconda riga il primo integrale si annulla in quanto integrale di funzione dispari su dominio pari, e la soluzione dell'integrale di Gauss.
Il valore medio dell'operatore $\hat{p}^2$ risulta invece:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} p^2|\psi(p)|^2 dp = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty} p^2\ e^{-\frac{(p-p_0)^2}{\sigma}}dp = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma p'^2 + \sqrt{\sigma}p_0 p' + p_0^2)\ e^{-p'^2}dp' = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sigma\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sqrt{\pi}p_0^2\right) = p_0^2 + \frac{\sigma}{2}\end{aligned} \tag{2}$$

dove abbiamo integrato per parti $\int_{-\infty}^{+\infty} p'^2\ e^{-p'^2}dp' = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
L'indeterminazione in $\hat{p}$ è pertanto:

$$\Delta^2\hat{p} \equiv \langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2 = p_0^2 + \frac{\sigma}{2} - p_0^2 = \frac{\sigma}{2} \tag{3}$$

Il caso A=0 e B=1 può essere calcolato ripetendo la stessa procedura oppure notando che lo stato $|\psi\rangle$ è il medesimo del caso precedente mandando $p_0 \to -p_0$. Seguono:

$$\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = -p_0 \qquad e \qquad \Delta^2\hat{p} = \frac{\sigma}{2} \tag{4}$$

(2) Il valore medio dell'operatore posizione per il caso A=1 e B=0 si ottiene allo stesso modo, ricordando che sugli autostati di impulso l'azione di $\hat{x}$ è $i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle &= i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(p)\frac{\partial}{\partial p}\psi(p)dp = -\frac{i\hbar}{\sqrt{\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{\sigma}}\frac{1}{\sigma}(p-p_0)dp = \\ &= -\frac{i\hbar}{\sqrt{\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p'}p'dp' = 0\end{aligned} \tag{5}$$

perchè si tratta ancora di integranda dispari su dominio pari.
Il valore medio di $\hat{x}^2$ è:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\hat{x}^2|\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(p)(i\hbar)^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}\psi(p)dp = \frac{\hbar^2}{\sigma\sqrt{\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{\sigma}}\left(1-\frac{1}{\sigma}(p-p_0)^2\right)dp = \\ &= \frac{\hbar^2}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p'^2}(1-p'^2)\ dp' = \frac{\hbar^2}{\sigma} - \frac{\hbar^2}{2\sigma} = \frac{\hbar^2}{2\sigma}\end{aligned} \tag{6}$$

L'indeterminazione in $\hat{x}$ è pertanto:

$$\Delta^2\hat{x} \equiv \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2\sigma} \tag{7}$$

Ancora una volta, il caso A=0 e B=1 può essere ricavato mandando $p_0 \to -p_0$ nel calcolo. I risultati di $\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle$ e $\Delta^2\hat{x}$ non cambiano.
Si può osservare (non richiesto) che in entrambi i casi $\Delta^2\hat{x}\Delta^2\hat{p} = \frac{\hbar^2}{4}$, perciò gli stati considerati sono di minima indeterminazione.

(3) In questo caso consideriamo lo stato $|\psi\rangle = A|\psi_1\rangle + B|\psi_2\rangle$, e perciò abbiamo che:

$$\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = |A|^2\langle\psi_1|\hat{p}|\psi_1\rangle + |B|^2\langle\psi_2|\hat{p}|\psi_2\rangle + AB^*\langle\psi_2|\hat{p}|\psi_1\rangle + A^*B\langle\psi_1|\hat{p}|\psi_2\rangle \tag{8}$$

Abbiamo già calcolato $\langle\psi_{1,2}|\hat{p}|\psi_{1,2}\rangle$ nei punti precedenti. Calcoliamo:

$$\begin{aligned}\langle\psi_2|\hat{p}|\psi_1\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} p\ \psi_2^*(p)\psi_1(p)dp = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty} p\ e^{-\frac{((p-p_0)^2+(p+p_0)^2)}{2\sigma}}dp = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}e^{-\frac{p_0^2}{\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty} p\ e^{-\frac{p^2}{\sigma}}dp = 0 = (\langle\psi_2|\hat{p}|\psi_1\rangle)^* = \langle\psi_1|\hat{p}^\dagger|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\hat{p}|\psi_2\rangle\end{aligned} \tag{9}$$

Poichè sia nel caso $A = \frac{1}{\sqrt{2}} = B$ che $A = \frac{1}{\sqrt{2}} = -B$ abbiamo $|A|^2 = |B|^2 = \frac{1}{2}$ rimaniamo con:

$$\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = \frac{1}{2}p_0 - \frac{1}{2}p_0 = 0 \tag{10}$$

(4) Secondo la definizione di densità di probabilità, e mantenendo la stessa notazione con A e B generici:

$$dP(0) = |\psi(0)|^2 = |A|^2|\psi_1(0)|^2 + |B|^2|\psi_2(0)|^2 + AB^*\psi_2^*(0)\psi_1(0) + A^*B\psi_1^*(0)\psi_2(0) \tag{11}$$

Possiamo calcolare

$$\psi_1(0) = \psi_1^*(0) = \psi_2(0) = \psi_2^*(0) = \left(\frac{1}{\pi\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{p_0^2}{2\sigma}} \tag{12}$$

e poichè nei due casi in esame abbiamo $|A|^2 = |B|^2 = \frac{1}{2}$ e $AB^* = A^*B = \pm\frac{1}{2}$, troviamo:

$$dP(0) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{p_0^2}{\sigma}} \tag{13}$$

e perciò rispettivamente:

$$dP(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi\sigma}}e^{-\frac{p_0^2}{\sigma}} \qquad \text{e} \qquad dP(0) = 0 \tag{14}$$

(5) Il modo più veloce per calcolare il valore medio di $\hat{p}$ ad ogni tempo t è approcciare il problema secondo il formalismo di Heinseberg. Vale:

$$\frac{d}{dt}\hat{p}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}, \hat{H}] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}, \kappa\hat{x}] = -\kappa \tag{15}$$

La soluzione dell'equazione differenziale è banale:

$$\hat{p}_H(t) = \hat{p}_H(0) - \kappa t \implies \langle\hat{p}_H\rangle(t) = \langle\hat{p}_H\rangle(0) - \kappa t = -\kappa t \tag{16}$$

perchè in entrambi i casi $\langle\hat{p}_H\rangle(0) = \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = 0$.

(6) Pagine 75-76, sezione 4.3.3 del libro di testo.

(7) Risolviamo l'equazione agli autovalori di energia:

$$\left(\frac{p^2}{2m} + i\hbar\kappa\frac{\partial}{\partial p}\right)\psi_E(p) = E\psi_E(p) \tag{17}$$

con $\psi_E(p) \equiv \langle p|E\rangle$ autofunzioni di energia. Integrando esplicitamente l'equazione differenziale in p troviamo che:

$$\psi_E(p) = \mathcal{N}\exp\left[\frac{i}{\hbar\kappa}\left(\frac{p^3}{6m} - Ep\right)\right] \tag{18}$$

La costante di normalizzazione $\mathcal{N}$ si trova imponendo la normalizzazione impropria $\langle E'|E\rangle = \delta(E-E')$ e usando la rappresentazione integrale della delta di Dirac. Il risultato è:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\kappa}} \tag{19}$$

(8) La densità di probabilità di misurare l'energia E_0 per t=0 è, nei due casi $A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm B$:

$$\begin{aligned} dP(E_0,0) = |\langle E_0|\psi(0)\rangle|^2 &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\langle E_0|p\rangle\langle p|\psi(t=0)\rangle dp\right|^2 = \\ &= \frac{1}{4\pi\hbar\kappa\sqrt{\pi\sigma}}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar\kappa}\left(\frac{p^3}{6m}-E_0p\right)}\left[e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma}} \pm e^{-\frac{(p+p_0)^2}{2\sigma}}\right]dp\right|^2 \end{aligned} \tag{20}$$

ovvero, nel primo caso

$$\frac{1}{\pi\hbar\kappa\sqrt{\pi\sigma}}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{i}{\hbar\kappa}\left(\frac{p^3}{6m} - E_0p\right) - \frac{p^2+p_0^2}{2\sigma}\right]\cosh\frac{p_0p}{\sigma}dp\right|^2 \tag{21}$$

e nel secondo caso

$$\frac{1}{\pi\hbar\kappa\sqrt{\pi\sigma}}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{i}{\hbar\kappa}\left(\frac{p^3}{6m} - E_0p\right) - \frac{p^2+p_0^2}{2\sigma}\right]\sinh\frac{p_0p}{\sigma}dp\right|^2 \tag{22}$$

Subito dopo la misura di energia, il sistema si trova in $|E_0\rangle$, e perciò la funzione d'onda richiesta è la soluzione della domanda (7) con E_0 al posto di E:

$$\psi_{E_0}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\kappa}}\exp\left[\frac{i}{\hbar\kappa}\left(\frac{p^3}{6m} - E_0p\right)\right] \tag{23}$$

(9) Possiamo utilizzare le soluzioni trovate alle domande (1) e (2) per rispondere a questa domanda. Per A=1 e B=0 avevamo $\langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle = p_0^2 + \frac{\sigma}{2}$ e $\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = 0$. Segue che:

$$\langle\hat{H}\rangle = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \langle\psi|\frac{\hat{p}^2}{2m} + \kappa\hat{x}|\psi\rangle = \frac{1}{2m}(p_0^2 + \frac{\sigma}{2}) = \frac{2p_0^2+\sigma}{4m} \tag{24}$$

(10) L'operatore di evoluzione temporale è:

$$\hat{S}(t,0) \equiv \exp\frac{t}{i\hbar}(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \kappa\hat{x}) \tag{25}$$

Sfruttando il suggerimento, utilizziamo la formula di Baker-Campbell-Hausdorff con $A = \dfrac{t\hat{p}^2}{2im\hbar}$ e $B = \dfrac{t\kappa\hat{x}}{i\hbar}$. Poichè vale $[\hat{p}^2,\hat{x}] = -2i\hbar\hat{p}$, abbiamo:

$$[A,B] = \frac{t}{2im\hbar}\frac{t\kappa}{i\hbar}[\hat{p}^2,\hat{x}] = \frac{i\kappa t^2}{m\hbar}\hat{p} \tag{26}$$

$$[B,[A,B]] = \frac{t\kappa}{i\hbar}\frac{i\kappa t^2}{m\hbar}[\hat{x},\hat{p}] = \frac{i\kappa^2 t^3}{m\hbar} \tag{27}$$

$$[A,[A,B]] = \frac{t}{2im\hbar}\frac{i\kappa t^2}{m\hbar}[\hat{p}^2,\hat{p}] = 0 \tag{28}$$

Applicando la formula, abbiamo quindi

$$\hat{S}(t,0) \equiv \exp\left[\frac{t}{i\hbar}\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+\kappa\hat{x}\right)\right] = \exp\left[\frac{t}{i\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m}\right]\exp\left[\frac{t\kappa}{i\hbar}\hat{x}\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{i\kappa t^2}{m\hbar}\hat{p}\right]\exp\left[\frac{1}{3}\frac{i\kappa^2 t^3}{m\hbar}\right] \tag{29}$$

L'operatore applicato sullo stato $|p'\rangle$, che ha funzione d'onda $\langle p|p'\rangle = \delta(p-p')$ nello spazio degli impulsi, è perciò:

$$\langle p|S(t)|p'\rangle = \exp\left[\frac{tp^2}{2im\hbar}\right]\exp\left[t\kappa\frac{d}{dp}\right]\exp\left[\frac{t^2\kappa p}{2im\hbar}\right]\exp\left[-\frac{t^3\kappa^2}{3im\hbar}\right]\delta(p-p') \tag{30}$$

(11) Possiamo utilizzare quanto trovato al punto precedente. Per A=1 e B=0:

$$\begin{aligned}
\psi(p,t) &= \int \langle p|\hat{S}(t)|p'\rangle\langle p'|\psi_1(0)\rangle dp' = \\
&= \int \delta(p-p')\exp\left[\frac{tp^2}{2im\hbar}\right]\exp\left[t\kappa\frac{d}{dp}\right]\exp\left[\frac{t^2\kappa p}{2im\hbar}\right]\exp\left[-\frac{t^3\kappa^2}{3im\hbar}\right]\langle p'|\psi_1(0)\rangle dp' = \\
&= N(t)\exp\left[\frac{tp^2}{2im\hbar}\right]\exp\left[t\kappa\frac{d}{dp}\right]\left\{\exp\left[\frac{t^2\kappa p}{2im\hbar}\right]\psi_1(p,0)\right\}
\end{aligned} \tag{31}$$

dove nella terza riga abbiamo omesso la fase arbitraria $\exp[-\frac{t^3\kappa^2}{3im\hbar}]$, introducendo un fattore di fase arbitrario dipendente dal tempo, tale che $|N(t)|^2 = 1$. A questo punto si può osservare che l'operatore esponenziale della derivata di p realizza la traslazione:

$$\exp\left[\delta\frac{d}{dp}\right]\psi(p) = \psi(p+\delta) \tag{32}$$

Segue che:

$$\begin{aligned}
\psi(p,t) &= N(t)\exp\left[\frac{tp^2}{2im\hbar}\right]\exp\left[\frac{t^2\kappa(p+t\kappa)}{2im\hbar}\right]\psi_1(p+t\kappa,0) \\
&= \tilde{N}(t)\left(\frac{1}{\pi\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left[\frac{tp^2+t^2p\kappa}{2im\hbar}-\frac{(p+\kappa t-p_0)^2}{2\sigma}\right]
\end{aligned} \tag{33}$$

In alternativa, un procedimento meno intuitivo porta allo stesso risultato, introducendo una risoluzione d'identità negli autostati di energia e riconoscendo un traslazione di κt nell'impulso.

$$\begin{aligned}
\psi(p,t) &= \int \langle p|E\rangle\langle E|\exp\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t|\psi_1(0)\rangle dE = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\kappa}}\int \exp\left[\frac{i}{\hbar\kappa}\left(\frac{p^3}{6m}-Ep\right)+\frac{1}{i\hbar}Et\right]\langle E|\psi_1(0)\rangle dE = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\kappa}}\int \exp\left[\frac{i}{\hbar\kappa}\left(\frac{p^3}{6m}-\frac{(p+\kappa t)^3}{6m}+\frac{(p+\kappa t)^3}{6m}-E(p+\kappa t)\right)\right]\langle E|\psi_1(0)\rangle dE = \\
&= \exp\left[\frac{i}{6m\hbar\kappa}\left(p^3-(p+\kappa t)^3\right)\right]\psi_1(p+\kappa t,0)
\end{aligned} \tag{34}$$

dove abbiamo usato che le autofunzioni di energia $\langle p|E\rangle$ e $\langle p+\kappa t|E\rangle$ hanno la stessa costante di normalizzazione. A meno di una fase arbitraria dipendente dal tempo, questo risultato coincide con il precedente.