Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA del 17 giugno 2024

(1) Dobbiamo imporre la condizione

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = N^2(|1+i|^2 + 4) = N^2(2+4) = 6N^2\,, \tag{1}$$

da cui si ottiene $N = 1/\sqrt{6}$

(2)

Ricordiamo che

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \tag{2}$$

$$p = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^\dagger) \tag{3}$$

e che

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{4}$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle\,. \tag{5}$$

Si ottiene

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\psi|(a+a^\dagger)|\psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{1}{6}(2(1-i)\langle 0|0\rangle + 2(1+i)\langle 1|1\rangle) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \tag{6}$$

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\langle\psi|(a-a^\dagger)|\psi\rangle = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\frac{1}{6}(2(1-i)\langle 0|0\rangle - 2(1+i)\langle 1|1\rangle) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,. \tag{7}$$

(3)

Utilizzando la relazione di commutazione $[a, a^\dagger] = 1$, si ottiene

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^2 + (a^\dagger)^2 + 2N + 1) \tag{8}$$

$$p^2 = \frac{m\omega\hbar}{2}(-a^2 - (a^\dagger)^2 + 2N + 1)\,, \tag{9}$$

con $N|n\rangle = n|n\rangle$. Possiamo usare queste espressioni per ottenere

$$\langle\psi|x^2|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\psi|(a^2 + (a^\dagger)^2 + 2N + 1)|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\frac{8}{6}\langle 1|1\rangle + 1\right) = \frac{7}{3}\frac{\hbar}{2m\omega} \tag{10}$$

$$\langle\psi|p^2|\psi\rangle = \frac{m\omega\hbar}{2}\langle\psi|(-a^2 - (a^\dagger)^2 + 2N + 1)|\psi\rangle = \frac{m\omega\hbar}{2}\left(\frac{8}{6}\langle 1|1\rangle + 1\right) = \frac{7}{3}\frac{m\omega\hbar}{2}\,, \tag{11}$$

da cui si ottengono le indeterminazioni

$$\Delta^2 x = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{7}{3}\frac{\hbar}{2m\omega} - \frac{4}{9}\frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{17}{9}\frac{\hbar}{2m\omega} \tag{12}$$

$$\Delta^2 p = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{7}{3}\frac{m\omega\hbar}{2} - \frac{4}{9}\frac{m\omega\hbar}{2} = \frac{17}{9}\frac{m\omega\hbar}{2}\,. \tag{13}$$

Gli stati sono quindi chiaramente non di minima indeterminazione: infatti solo lo stato fondamentale è di minima indetereminazione.

(4)

Sapendo che l'energia nell'n esimo autostato dell'oscillatore armonico è $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ concludiamo che una misura di energia su $|\psi\rangle$ può avere due risultati:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\,, \quad p_0 = \frac{(1+i)^2}{6} = \frac{1}{3} \tag{14}$$

$$E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}\,, \quad p_1 = \frac{(2)^2}{6} = \frac{2}{3}\,. \tag{15}$$

Le funzioni d'onda nella base delle posizioni immediatamente dopo la misura di energia sono quindi, rispettivamente

$$\psi_0(x) = N_0 \exp\left(-\frac{x^2 m\omega}{2\hbar}\right) \tag{16}$$

$$\psi_1(x) = N_0 \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} 2x \exp\left(-\frac{x^2 m\omega}{2\hbar}\right), \tag{17}$$

con $N_0 = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$.

(5)

Nel primo caso del punto precedente, lo stato collassa in $|\psi\rangle = |0\rangle$. Essendo un autostato dell'energia, l'evoluzione temporale lo lascia invariato, cioè

$$|\psi\rangle(t) = |\psi\rangle(0) = |0\rangle\,. \tag{18}$$

Quindi i valori medi e le indeterminazioni di x e p ad un qualunque tempo t sono

$$\langle 0|x|0\rangle(t) = 0 \tag{19}$$

$$\langle 0|p|0\rangle(t) = 0 \tag{20}$$

$$\Delta^2 x(t) = \langle 0|x^2|0\rangle(t) = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega} \tag{21}$$

$$\Delta^2 p(t) = \langle 0|p^2|0\rangle(t) = \frac{1}{2}\hbar m\omega\,. \tag{22}$$

Allo stesso modo, nel secondo caso lo stato collassa in $|\psi\rangle = |1\rangle$ e l'evoluzione temporale lo lascia invariato. Si ha quindi

$$\langle 1|x|1\rangle(t) = 0 \tag{23}$$

$$\langle 1|p|1\rangle(t) = 0 \tag{24}$$

$$\Delta^2 x(t) = \langle 1|x^2|1\rangle(t) = \frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega} \tag{25}$$

$$\Delta^2 p(t) = \langle 1|p^2|1\rangle(t) = \frac{3}{2}\hbar m\omega\,. \tag{26}$$

(6)

Pagina 153, sezione 8.4.2 del libro di testo.

(7)

L'equazione di Heisenberg per l'operatore O è

$$\frac{d}{dt}O = \frac{1}{i\hbar}[O, H]\,. \tag{27}$$

Ricordando che $H = \hbar\omega(N + 1/2)$ e che

$$[N, a] = -a \tag{28}$$

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger\,, \tag{29}$$

si ottiene

$$\frac{1}{i\hbar}[O, H] = \frac{1}{i\hbar}((1+i)\lambda[a, H] + (1-i)\lambda[a^\dagger, H]) = \frac{1}{i\hbar}((1+i)\lambda\hbar\omega a - (1-i)\lambda\hbar\omega a^\dagger) = \tag{30}$$

$$= (1-i)\lambda\omega a + (1+i)\lambda\omega a^\dagger. \tag{31}$$

(8)

L'evoluzione temporale degli operatori x e p in rappresentazione di Heisenberg è data da

$$x(t) = x\cos\omega t + \frac{p}{m\omega}\sin\omega t \tag{32}$$

$$p(t) = -m\omega x \sin\omega t + p\cos\omega t\,. \tag{33}$$

I valori medi degli operatori x, p sono quindi

$$\langle\psi|x(t)|\psi\rangle = \langle x(0)\rangle\cos\omega t + \frac{\langle p(0)\rangle}{m\omega}\sin\omega t \tag{34}$$

$$\langle\psi|p(t)|\psi\rangle = -m\omega\langle x(0)\rangle\sin\omega t + \langle p(0)\rangle\cos\omega t, \tag{35}$$

con $\langle x(0)\rangle$ e $\langle p(0)\rangle$ rispettivamente dati dalle Eq. (6) e (7). Si ottiene

$$x(t) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\cos\omega t - \sin\omega t) \tag{36}$$

$$p(t) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(\cos\omega t + \sin\omega t)\,. \tag{37}$$

Per calcolare i valori medi degli operatori x^2 e p^2, notiamo che il contributo dei termini a^2 e $(a^\dagger)^2$ delle Eq. (8-9) ai valori medi nello stato $|\psi\rangle$ è nullo. Visto che l'operatore N non evolve nel tempo, otteniamo quindi semplicemente

$$\langle\psi|x^2(t)|\psi\rangle = \langle\psi|x^2(0)|\psi\rangle \tag{38}$$

$$\langle\psi|p^2(t)|\psi\rangle = \langle\psi|p^2(0)|\psi\rangle\,, \tag{39}$$

dove $\langle\psi|x^2(0)|\psi\rangle$ e $\langle\psi|p^2(0)|\psi\rangle$ sono rispettivamente dati dalle Eq. (10) e (11).

Si ha quindi

$$\Delta^2 x(t) = \langle\psi|x^2(0)|\psi\rangle - (\langle\psi|x(t)|\psi\rangle)^2 \tag{40}$$

$$\Delta^2 p(t) = \langle\psi|p^2(0)|\psi\rangle - (\langle\psi|p(t)|\psi\rangle)^2\,, \tag{41}$$

con le due coppie di valori medi date rispettivamente dalle Eq. (10-11) e (34-35).

Un altro modo, più laborioso, per calcolare $\langle\psi|x^2(t)|\psi\rangle$ e $\langle\psi|p^2(t)|\psi\rangle$ è il seguente:

$$\langle\psi|x^2(t)|\psi\rangle = \langle\psi|x^2\cos^2\omega t + \frac{p^2}{m^2\omega^2}\sin^2(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{m\omega}(xp+px)|\psi\rangle \tag{42}$$

$$= \langle x^2(0)\rangle\cos^2\omega t + \langle p^2(0)\rangle\frac{\sin^2(\omega t)}{m^2\omega^2} + \frac{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{m\omega}i\hbar + \frac{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{m\omega}2\langle\psi|px|\psi\rangle \tag{43}$$

$$= \langle x^2(0)\rangle\cos^2\omega t + \langle p^2(0)\rangle\frac{\sin^2(\omega t)}{m^2\omega^2} + \frac{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{m\omega}i\hbar - \frac{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{m\omega}i\hbar \tag{44}$$

$$= \langle x^2(0)\rangle\cos^2\omega t + \langle p^2(0)\rangle\frac{\sin^2(\omega t)}{m^2\omega^2} \tag{45}$$

$$\langle\psi|p^2(t)|\psi\rangle = m^2\omega^2\sin^2\omega t\langle x^2(0)\rangle + \cos^2\omega t\langle p^2(0)\rangle\,, \tag{46}$$

dove si è utilizzato il fatto che $xp + px = i\hbar + 2px$ e che

$$px = -i\frac{\hbar}{2}(a-a^\dagger)(a+a^\dagger) = -i\frac{\hbar}{2}(a^2 - (a^\dagger)^2 + 1)\,, \tag{47}$$

dove di nuovo i termini a^2 e $(a^\dagger)^2$ non contribuiscono. Sostituendo i valori Eq. (10-11) di $\langle x^2(0)\rangle$ e $\langle p^2(0)\rangle$ nella Eq. (46) la dipendenza dal tempo scompare e si ritrova il risultato Eq. (38-39).

(9)

Lo stato $|\psi\rangle$ è sovrapposizione degli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Quindi il sottospazio a cui siamo interessati è quello generato dai due vettori $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Usando le Equazioni (4) e otteniamo che

$$\langle 0|\,O\,|0\rangle = 0\,,\quad \langle 1|\,O\,|0\rangle = (1-i)\lambda\,, \tag{48}$$

$$\langle 0|\,O\,|1\rangle = (1+i)\lambda\,,\quad \langle 1|\,O\,|1\rangle = 0\,. \tag{49}$$

Quindi nel sottospazio generato da $|0\rangle$ e $|1\rangle$ la matrice di O è

$$O = \begin{pmatrix} 0 & (1+i)\lambda \\ (1-i)\lambda & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{50}$$

È dunque ovvio che l'operatore O in questo sottospazio è autoaggiunto se $\lambda \in \mathbb{R}$.

(10)

Per prima cosa dobbiamo calcolare autovalori e autostati di O. Si ottiene

$$\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{2}\lambda\,,\quad |\lambda_{1/2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + |1\rangle\right)\,. \tag{51}$$

Quindi i possibili risultati di una misura di O sono $\pm\sqrt{2}\lambda$. Le probabilità sono date da

$$P(\lambda_{1/2}) = |\,\langle\lambda_{1/2}|\psi\rangle\,|^2 = \frac{1}{12}\left|\pm\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\right|^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \tag{52}$$

(11)

Nel sottospazio dato abbiamo

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} . \tag{53}$$

Utilizzando le matrici di Pauli possiamo esprimere O e H come

$$O = \lambda\left(\sigma_1 - \sigma_2\right) , \tag{54}$$

$$H = \hbar\omega \left(\mathbf{1} - \frac{1}{2}\sigma_3\right) . \tag{55}$$

Per calcolare l'evoluzione temporale di O in rappresentazione di Heisenberg dobbiamo risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}O(t) = \frac{1}{i\hbar}[O, H] . \tag{56}$$

Inserendo le equazioni (54) e (55) in (56) otteniamo

$$[O, H] = \lambda\hbar\omega[\sigma_1 - \sigma_2, \mathbf{1} - \frac{1}{2}\sigma_3] = \lambda\hbar\omega[\sigma_1 - \sigma_2, -\frac{1}{2}\sigma_3] = \hbar\omega\sigma_3\lambda(\sigma_1 - \sigma_2). \tag{57}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_k\sigma_i$ se $i \neq j$.

La Eq. (57) è un'equazione differenziale della forma

$$\frac{d}{dt}O(t) = AO(t) , \tag{58}$$

con

$$A = -i\omega\sigma_3 = \begin{pmatrix} -i\omega & 0 \\ 0 & i\omega \end{pmatrix} . \tag{59}$$

La soluzione è data da

$$O = e^{At}O(0) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (1+i)\lambda \\ (1-i)\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega t}(1+i)\lambda \\ e^{i\omega t}(1-i)\lambda & 0 \end{pmatrix} . \tag{60}$$

Notiamo che la soluzione data Eq. (60) è proprio quello che si trova sfruttando l'evoluzione temporale degli operatori a e $a^\dagger$, che è data da

$$a(t) = e^{-i\omega t}a(0) , \tag{61}$$

$$a^\dagger(t) = e^{i\omega t}a^\dagger(0) , \tag{62}$$

e inserita nella definizione di O da origine alla matrice in equazione (60).