

Soluzione all'esame di FISICA QUANTISTICA I del 22 giugno 2026

- (1) La densità di probabilità di trovare un certo $\bar{p}$ è data dal modulo quadro della funzione d'onda nella base degli impulsi $\psi(p)$, valutata con $p = \bar{p}$.

$$|\psi(\bar{p})|^2 = N^2 \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\Delta^2 p}\right) . \quad (1)$$

La costante di normalizzazione è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(p)|^2 dp = N^2 \sqrt{2\pi\Delta^2 p} = 1 \quad \Rightarrow \quad N = \left(\frac{1}{2\pi\Delta^2 p}\right)^{\frac{1}{4}} . \quad (2)$$

- (2) Subito dopo la misura il sistema si trova nell'autostato di impulso $|\bar{\psi}(-t_0 + \epsilon)\rangle = |\bar{p}\rangle$, per cui la funzione d'onda associata nella base delle posizioni è

$$\bar{\psi}(-t_0 + \epsilon) = \langle x|\bar{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i\bar{p}x}{\hbar}\right) . \quad (3)$$

Essendo un autostato di impulso, la funzione d'onda è normalizzata in senso improprio secondo

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p') . \quad (4)$$

Equivalentemente si può scrivere l'autostato come $|\bar{k}\rangle$, con $\bar{p} = \hbar\bar{k}$. In tal caso la condizione di normalizzazione è

$$\langle k|k'\rangle = \delta(k - k') \quad (5)$$

e la funzione d'onda è

$$\bar{\psi}(-t_0 + \epsilon) = \langle x|\bar{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\bar{k}x) . \quad (6)$$

- (3) Introduciamo l'operatore di evoluzione temporale per $t < 0$:

$$\hat{S}_1(-t_0, 0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1 t_0} = e^{-i\frac{\bar{p}^2}{2m\hbar} t_0} . \quad (7)$$

Dato che il sistema subito dopo la misura si trova in un autostato di impulso, possiamo facilmente ricavare la funzione d'onda al tempo $t=0$ come:

$$\bar{\psi}(x, 0) = \langle x|\hat{S}_1(-t_0, 0)|\bar{\psi}(-t_0 + \epsilon)\rangle = \langle x|e^{-i\frac{\bar{p}^2}{2m\hbar} t_0}|\bar{p}\rangle = \exp\left(-i\frac{\bar{p}^2}{2m\hbar} t_0\right) \bar{\psi}(x, -t_0 + \epsilon) , \quad (8)$$

con $\bar{\psi}(x, -t_0 + \epsilon)$ determinata al punto precedente.

- (4) Per $0 \leq t \leq t_0$ l'hamiltoniana è un oscillatore armonico centrato in $x = 0$, con spettro

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Al tempo $t = +\epsilon$ successivo alla misura il sistema si trova quindi nell'autostato di energia fondamentale: $|\bar{\psi}(+\epsilon)\rangle = |0\rangle$. L'autofunzione associata nella base delle posizioni è:

$$\psi_0(x, +\epsilon) = \langle x|\bar{\psi}(+\epsilon)\rangle = \langle x|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right). \quad (10)$$

- (5) La densità di probabilità richiesta è il modulo quadro della proiezione dello stato $|\bar{\psi}(0)\rangle$ in cui si trova il sistema prima della misura sull'autostato $|0\rangle$ associato all'autovalore risultato della misura:

$$\begin{aligned} |\langle 0|\bar{\psi}(0)\rangle|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle E_0|x\rangle \langle x|\bar{\psi}(0)\rangle \right|^2 \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-i\frac{\bar{p}^2}{2m\hbar}t_0\right) \exp\left(\frac{i\bar{p}x}{\hbar}\right) \right|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

L'integrale dato coincide con la trasformata di Fourier della funzione d'onda di stato fondamentale per l'atomo di idrogeno e si ha quindi:

$$\begin{aligned} |\langle 0|\bar{\psi}(0)\rangle|^2 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-i\frac{\bar{p}^2}{2m\hbar}t_0\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \frac{i\bar{p}x}{\hbar}\right) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m\omega}} \exp\left(-\frac{\bar{p}^2}{2\hbar m\omega}\right) \right|^2 = \sqrt{\frac{1}{\pi\hbar m\omega}} \exp\left(-\frac{\bar{p}^2}{\hbar m\omega}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

dove nell'ultima riga è stata utilizzata la formula dell'integrale gaussiano dopo aver completato il quadrato a esponente secondo $-\frac{x^2 m\omega}{2\hbar} + \frac{ix\bar{p}}{\hbar} = -\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 - \frac{2i\bar{p}}{m\omega}x + \left(\frac{i\bar{p}}{m\omega}\right)^2\right) - \frac{\bar{p}^2}{2\hbar m\omega}$.

Il risultato si può anche trovare senza fare alcun calcolo, osservando che la funzione d'onda di stato fondamentale per l'oscillatore armonico è una gaussiana, e ricordando che la trasformata di Fourier di una gaussiana di larghezza $4\Delta^2 x$ è una gaussiana di larghezza $4\Delta^2 p$, con $\Delta^2 x$ e $\Delta^2 p$ legati dalla relazione di minima indeterminazione $\Delta^2 x \Delta^2 p = \frac{\hbar^2}{4}$.

- (6) Pagine 88-90, sezione 5.2.6 del libro di testo.
- (7) Tra $t = +\epsilon$ e $t = t_0$ il sistema è evoluto nel tempo secondo l'hamiltoniana di oscillatore armonico $\hat{H}_2$, rimanendo nello stato fondamentale $|0\rangle$ a meno di una fase globale. Per tempi immediatamente successivi, la nuova hamiltoniana si può scrivere come hamiltoniana di oscillatore armonico, rispetto ad una coordinata traslata x^{primo} , a meno di una costante additiva:

$$\hat{H}_3 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 + eE\hat{x} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(\hat{x}^2 + \frac{2eE}{m\omega^2}\hat{x}\right) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}'^2 - \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2}, \quad (13)$$

con $\hat{x}' = \hat{x} + eE/m\omega^2$. L'autostato $|0\rangle$ dell'hamiltoniana $\hat{H}_2$ è una sovrapposizione di tutti gli infiniti autostati della nuova hamiltoniana $\hat{H}_3$, e pertanto i possibili risultati di una misura di energia sono i nuovi autovalori di energia:

$$E_{n_E} = \hbar\omega \left(n_E + \frac{1}{2}\right) - \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2} \quad n_E = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

- (8) Osserviamo che le due hamiltoniane sono legate da una traslazione e da una costante additiva. La traslazione è una trasformazione unitaria, e dunque le due hamiltoniane sono unitariamente equivalenti, a meno della costante additiva data. A meno di questa costante additiva hanno quindi lo stesso spettro di autovalori, mentre le autofunzioni sono legate dalla trasformazione unitaria.

Introduciamo dunque l'operatore unitario di traslazione con le seguenti proprietà:

$$\hat{T}_\delta = e^{i\delta\hat{p}/\hbar}, \quad \hat{T}_\delta^{-1} = \hat{T}_\delta^\dagger, \quad (15)$$

$$\hat{x}' = \hat{T}_\delta^\dagger \hat{x} \hat{T}_\delta = \hat{x} - \delta, \quad \hat{T}_\delta |x\rangle = |x - \delta\rangle, \quad \langle x | \hat{T}_\delta = \langle x + \delta|. \quad (16)$$

Abbiamo quindi

$$\hat{H}_3 = \hat{T}_\delta^\dagger \hat{H}_2 \hat{T}_\delta - \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2}, \quad (17)$$

identificando $\delta = -\frac{eE}{m\omega^2}$. Segue che:

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 |n\rangle = E_n |n\rangle &\implies \\ E_n \left(\hat{T}_\delta^\dagger |n\rangle \right) = \hat{T}_\delta^\dagger \hat{H}_2 |n\rangle = \hat{T}_\delta^\dagger \hat{H}_2 \hat{T}_\delta \hat{T}_\delta^\dagger |n\rangle = \left(\hat{H}_3 + \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2} \right) \left(\hat{T}_\delta^\dagger |n\rangle \right) &\implies \\ \hat{H}_3 \left(\hat{T}_\delta^\dagger |n\rangle \right) = E_{n_E} \left(\hat{T}_\delta^\dagger |n\rangle \right). \end{aligned} \quad (18)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la definizione di E_{n_E} trovata al punto (7). Possiamo quindi identificare:

$$|n_E\rangle = \hat{T}_\delta^\dagger |n\rangle, \quad E_{n_E} = E_n - \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2}, \quad (19)$$

e l'operatore $\hat{T}$ richiesto è:

$$\hat{T} = \hat{T}_\delta^\dagger = \hat{T}_{-eE/m\omega^2}^\dagger = e^{-i\frac{eE}{\hbar m\omega^2} \hat{p}}, \quad (20)$$

dove ovviamente nella base delle coordinate $\langle x | p | \psi \rangle = -i \frac{d}{dx} \psi(x)$.

- (9) Le definizioni degli operatori di distruzione sono:

$$\begin{aligned} \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) \quad \hat{a}_E = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x}' + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) &\implies \\ \hat{a}_E = \hat{a} + \alpha \quad \text{con } \alpha = \frac{Ee}{\sqrt{2\hbar m\omega^3}} \end{aligned} \quad (21)$$

Segue:

$$\hat{a}_E |0\rangle = (\hat{a} + \alpha) |0\rangle = \alpha |0\rangle \quad (22)$$

perciò $|0\rangle$ è autostato di $\hat{a}_E$ con autovalore α .

- (10) Poichè il sistema si trova in $|\psi(t_0 + \epsilon)\rangle = |0\rangle$ la probabilità richiesta è $P(E_{n_E}) = |\langle n_E | 0 \rangle|^2$. La soluzione può essere trovata esprimendo $|n_E\rangle$ come azione ripetuta del relativo operatore di creazione:

$$P(E_{n_E}) = |\langle n_E | 0 \rangle|^2 = \left| \langle 0_E | \frac{(\hat{a}_E)^n}{\sqrt{n!}} | 0 \rangle \right|^2 = \left| \langle 0_E | \frac{(\hat{a} + \alpha)^n}{\sqrt{n!}} | 0 \rangle \right|^2 = \frac{\alpha^{2n}}{n!} |\langle 0_E | 0 \rangle|^2, \quad (23)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato $\hat{a}|0\rangle = 0$. La quantità $\langle 0_E|0\rangle$ può essere calcolata tramite formula dell'integrale gaussiano, sfruttando $\psi_{0_E}(x) = \langle x|0_E\rangle = \psi_0(x - \delta)$ e completando il quadrato ad esponente:

$$\begin{aligned}\langle 0_E|0\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle 0_E|x\rangle \langle x|0\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(x - \delta)^2 - \frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) = e^{-m\omega\delta^2/4\hbar} = e^{-\alpha^2/2}.\end{aligned}\quad (24)$$

Segue immediatamente che

$$P(E_{n_E}) = \frac{\alpha^{2n}}{n!} e^{-\alpha^2}.\quad (25)$$

Un metodo alternativo ma ugualmente valido prevede l'utilizzo esplicito dell'operatore di traslazione:

$$P(E_{n_E}) = |\langle n_E|0\rangle|^2 = \left|\langle n|\hat{T}_\delta|0\rangle\right|^2 = \left|\langle n|\exp\left(-\frac{ieE\hat{p}}{\hbar m\omega^2}\right)|0\rangle\right|^2 = \left|\langle n|\exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha\hat{a})|0\rangle\right|^2\quad (26)$$

dove abbiamo introdotto la definizione di $\hat{p}$ in termini di operatori di creazione e distruzione $\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$. Per l'identità di BCH abbiamo:

$$e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha\hat{a}} = e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha\hat{a}} e^{-\frac{1}{2}[\alpha\hat{a}^\dagger, -\alpha\hat{a}]} = e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha\hat{a}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}},\quad (27)$$

avendo utilizzato la relazione $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = -1$. Segue:

$$\begin{aligned}P(E_{n_E}) &= e^{-\alpha^2} \left|\langle n|e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha\hat{a}}|0\rangle\right|^2 = e^{-\alpha^2} \left|\langle n|e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle\right|^2 = \\ &= e^{-\alpha^2} \left|\sum_{m=0}^{\infty} \langle n|\frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^m}{m!}|0\rangle\right|^2 = e^{-\alpha^2} \left|\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^m}{\sqrt{m!}} \langle n|m\rangle\right|^2 = \frac{\alpha^{2n}}{n!} e^{-\alpha^2}.\end{aligned}\quad (28)$$

(11) La probabilità è costante nel tempo, infatti:

$$\begin{aligned}P(E_{n_E}, t) &= \left|\langle n_E|\hat{S}_3(t_0, t)|0\rangle\right|^2 = \left|\langle n_E|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_3(t-t_0)}|0\rangle\right|^2 = \\ &= \left|e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n_E}(t-t_0)}\langle n_E|0\rangle\right|^2 = |\langle n_E|0\rangle|^2.\end{aligned}\quad (29)$$