Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA di luglio 2024

(1)
Le autofunzioni dell'Hamiltoniana della buca infinita di potenziale sono

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}}\cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) & \text{se } n \text{ dispari} \\ \sqrt{\frac{1}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) & \text{se } n \text{ pari} \end{cases} , \tag{1}$$

con autovalori

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{8a^2m}n^2 \,. \tag{2}$$

Quindi $n = 1$ corrisponde allo stato fondamentale $n = 2$ al primo stato eccitato e così via, e dunque la funzione d'onda è

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{3}}\left[\psi_1(x) + (1+i)\psi_3(x)\right] = \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{a}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2a}x\right) + (1+i)\cos\left(\frac{3\pi}{2a}x\right)\right] . \tag{3}$$

I possibili risultati di una misura di energia e le loro probabilità sono

$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{8a^2m}, \quad P = \frac{1}{3}\,; \tag{4}$$

$$E_3 = \frac{9\hbar^2\pi^2}{8a^2m,} \quad P = \frac{2}{3}\,. \tag{5}$$

(2)
L'operatore O, nel sottospazio ricoperto dai vettori $|1\rangle$ e $|3\rangle$, ha la matrice

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \tag{6}$$

i cui autovalori sono i possibili risultati di una misura, e sono ± 1.
(3)
Gli autovettori di O sono

$$\lambda = 1: \quad |\lambda_1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|1\rangle + |3\rangle\right) , \tag{7}$$

$$\lambda = -1: \quad |\lambda_{-1}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|1\rangle - |3\rangle\right) . \tag{8}$$

A seconda del risultato della misura di O, lo stato dopo la misura si trova nel corrispondente autostato.
(4)
Le probabilità che una misura di O dia uno o l'altro dei suoi autovalori se il sistema si trova nello stato $|\psi\rangle$ è

$$P_\pm = |\langle\lambda_{\pm 1}|\psi\rangle|^2 = \left|\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\langle 1| \pm \langle 3|\right)\left(|1\rangle + (1+i)|3\rangle\right)\right|^2 = \left|\sqrt{\frac{1}{6}}\left(1 \pm (1+i)\right)\right|^2 = \begin{cases} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \end{cases} . \tag{9}$$

(5)
Il valori medo della posizione è.

$$\langle x\rangle = \langle\lambda_{\pm 1}|x|\lambda_{\pm 1}\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle 1| \pm \langle 3|\right) x \left(|1\rangle \pm |3\rangle\right) \tag{10}$$

Ma le funzioni d'onda $\langle x|1\rangle$ e $\langle x|3\rangle$ sono entrambe pari, dunque $\langle x|\lambda_{\pm 1}\rangle$ è pure pari e

$$\langle x\rangle = \langle\lambda_{\pm 1}|x|\lambda_{\pm 1}\rangle = 0\,. \tag{11}$$

perché è l'integranda di una funzione dispari su dominio pari.

Lo stesso argomento implica che

$$\langle p \rangle = \langle \lambda_{\pm 1} | p | \lambda_{\pm 1} \rangle = 0\,. \tag{12}$$

visto che $\langle x|p|\psi\rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} \langle x|\psi\rangle$ e la derivata di una funzione pari è dispari.

I valori medi dell'energia sono dati da

$$\langle H \rangle = \langle \lambda_{\pm 1} | H | \lambda_{\pm 1} \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle 1| \pm \langle 3| \right) H \left(|1\rangle \pm |3\rangle \right) = \frac{1}{2} \left(E_1 + E_3 \right) = \frac{5\hbar^2 \pi^2}{8a^2 m}\,. \tag{13}$$

(6)

Per dimostrarlo basta osservare che l'Hamiltoniana è invariante sotto parità, cioè

$$H = \mathcal{P} H \mathcal{P}^{-1}\,. \tag{14}$$

Ne segue che H e $\mathcal{P}$ commutano e quindi hanno autofunzioni comuni. Visto che la buca infinita ammette solo autofunzioni di stato legato, e lo spettro di stati legati per un problema unidimensionale è non degenere, ne segue che tutte le autofunzioni di H sono anche autofunzioni di $\mathcal{P}$.

(7)

Vedere complemento 18 del libro di testo (pag 123): autofunzioni Eq.(7.43) e autovalori Eq. (7.46). Viene considerata corretta sia la soluzione in cui le autofunzioni sono scritte in questa forma, che nella forma ottenuta esqguendo la sostituzione $x \to x - a$nell'Eq. (1) di questa soluzione.

(8) La hamiltoniana H' si ottiene dalla hamiltoniana H mediate una traslazione T_δ con $\delta = a$:

$$H' = T_\delta H T_\delta^{-1}\,. \tag{15}$$

Partendo da

$$H\,|\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle\,, \tag{16}$$

e applicando l'operatore T a entrambi i membri otteniamo

$$\left(T H T^{-1} \right) \left(T\,|\psi_n\rangle \right) = E_n \left(T\,|\psi_n\rangle \right)\,, \tag{17}$$

dove

$$\langle x|T\,|\psi_n\rangle = \psi_n(x-a). \tag{18}$$

Quindi $T\,|\psi_n\rangle$ è autostato di H' con autovalore E_n: i due operatori H e H' sono unitariamente equivalenti.

Si vede immediatamente dalla Eq. (18) che $\langle x|T|\psi\rangle = \exp - a\frac{d}{dx}\psi(x)$, e dunque, sviluppando l'esponenziale al primo ordine,

$$\langle x|iG|x'\rangle = -a \frac{d}{dx} \langle x|x'\rangle \tag{19}$$

da cui

$$\langle x|G|x'\rangle = ia \frac{d}{dx} \delta(x - x')\,. \tag{20}$$

(9)

Evolvendo lo stato che al tempo $t = 0$ è $|\psi\rangle$s i ottiene

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left[e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\,|1\rangle + (1+i) e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t}\,|3\rangle \right] \tag{21}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} \left[|1\rangle + (1+i) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_3 - E_1) t}\,|3\rangle \right]\,, \tag{22}$$

dove la fasae globale $e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}$ è inosservabile. Le probabilità che una misura di O dia $\lambda = \pm 1$ se il sistema si trova nello stato $|\psi(t)\rangle$ è data da

$$P_\pm(t) = |\,\langle \lambda_{\pm 1}|\psi(t)\rangle\,|^2 = \left| \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{3}} \left(\langle 1| \pm \langle 3| \right) \left(|1\rangle + (1+i) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_3 - E_1)t}\,|3\rangle \right) \right|^2 \tag{23}$$

$$= \left| \sqrt{\frac{1}{6}} \left(1 \pm (1+i) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_3 - E_1)t} \right) \right|^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \left(\cos\kappa + \sin\kappa \right)\,, \tag{24}$$

con $\kappa = (E_3 - E_1)t/\hbar$.

(10) Dobbiamo calcolare

$$\langle x|[T_\delta, \mathcal{P}]|\psi\rangle = \langle x|T_\delta \mathcal{P} - \mathcal{P} T_\delta|\psi\rangle = \langle x|T_\delta \mathcal{P}|\psi\rangle - \langle x|\mathcal{P} T_\delta|\psi\rangle = \langle x - \delta|\mathcal{P}|\psi\rangle - \langle -x|T_\delta|\psi\rangle \tag{25}$$

$$= \psi(\delta - x) - \psi(-x - \delta) \neq 0\,. \tag{26}$$

Quindi gli operatori T e $\mathcal{P}$ non commutano.
(11)
La Hamiltoniana H' è

$$H' = T_\delta H T_\delta^{-1} \,. \tag{27}$$

Dobbiamo trovare un operatore $\mathcal{P}'$ tale che

$$[H', \mathcal{P}'] = [T_\delta H T_\delta^{-1}, \mathcal{P}'] = 0 \,. \tag{28}$$

Scegliendo $\mathcal{P}' = T_\delta P T_\delta^{-1}$ si ottiene

$$[T_\delta H T_\delta^{-1}, \mathcal{P}'] = [T_\delta H T_\delta^{-1}, T_\delta \mathcal{P} T_\delta^{-1}] = T_\delta H \mathcal{P} T_\delta^{-1} - T_\delta P H T_\delta^{-1} = T_\delta [H, \mathcal{P}] T_\delta^{-1} = 0 \,, \tag{29}$$

dove si è utilizzato il fatto che $\mathcal{P}$ commuta con H (vedi punto (6)).