Soluzione della prova in itinere di FISICA QUANTISTICA del 19 settembre 2024

(1)

La costante di normalizzazione si calcola imponendo la condizione

$$1 = \langle \psi|\psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2\lambda(x-x_0)^2} = |N|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\,, \tag{1}$$

da cui si trova

$$N = \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{1/4}. \tag{2}$$

Per il valore medio della posizione troviamo

$$\langle \psi|\, x \,|\psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 x = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x+x_0)|^2 (x+x_0) = x_0\,, \tag{3}$$

dove abbiamo osservato che l'integrale di una funzione dispari in un intervallo di integrazione simmetrico rispetto all'origine è zero. Per il valore medio dell'impulso troviamo

$$\langle \psi|\, p \,|\psi \rangle = (-i\hbar) \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) = (-i\hbar) \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \tag{4}$$

$$= \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} (-i\hbar) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2\lambda(x-x_0)^2} \left(ik_0 - \lambda(x-x_0)\right) = \hbar k_0\,. \tag{5}$$

(2)

Dobbiamo calcolare

$$\Delta^2 x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2\,. \tag{6}$$

Abbiamo

$$\langle x^2 \rangle = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2\lambda(x-x_0)^2} x^2 = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2\lambda x^2} (x+x_0)^2 = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2\lambda x^2} (x^2 + x_0^2 + 2xx_0). \tag{7}$$

Usando l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2\alpha x^2} x^2 = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,, \tag{8}$$

otteniamo

$$\langle x^2 \rangle = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \left(\frac{1}{4\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} + x_0^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \right) = \left(\frac{1}{4\lambda} + x_0^2 \right) \tag{9}$$

da cui segue immediatamente

$$\Delta^2 x = \frac{1}{4\lambda}. \tag{10}$$

(3)

Dobbiamo calcolare

$$\langle x|\, O \,|x' \rangle = \langle x| \Big(|k_1\rangle \langle k_2| + |k_2\rangle \langle k_1| \Big) |x' \rangle\,. \tag{11}$$

Usando

$$\langle x|k \rangle = \frac{e^{ixk}}{\sqrt{2\pi}}\,, \tag{12}$$

troviamo

$$\langle x|\, O\, |x'\rangle = \frac{1}{2\pi}\left(e^{ixk_1}e^{-ix'k_2} + e^{ixk_2}e^{-ix'k_1}\right)\,. \tag{13}$$

(4)

Usando

$$\langle k|k'\rangle = \delta(k-k')\,, \tag{14}$$

otteniamo

$$\langle k|\, O\, |k'\rangle = \delta(k-k_1)\delta(k'-k_2) + \delta(k-k_2)\delta(k'-k_1)\,. \tag{15}$$

(5)

Dobbiamo calcolare

$$\langle \psi|\, O\, |\psi\rangle = \int dkdk' \langle\psi|k\rangle\langle k|O|k'\rangle\langle k'|\psi\rangle \tag{16}$$

$$= \int dkdk' \psi^*(k)(\delta(k-k_1)\delta(k'-k_2) + \delta(k-k_2)\delta(k'-k_1))\psi^*(k') \tag{17}$$

$$= \psi^*(k_1)\psi(k_2) + \psi^*(k_2)\psi(k_1). \tag{18}$$

Utilizzando il suggerimento, troviamo immediatamente

$$\psi(k) = \left(\frac{1}{2\pi\lambda}\right)^{1/4} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\lambda}} e^{-ikx_0} \tag{19}$$

dove abbiamo assorbito nella normalizzazione una fase $\exp ik_0x_0$.

Usando Eq. (19) in Eq. (18) troviamo

$$\langle\psi|\, O\, |\psi\rangle = \left(\frac{2}{\pi\lambda}\right)^{1/2} e^{-\frac{2k_0^2+k_1^2+k_2^2-2k_0(k_1+k_2)}{4\lambda}} \frac{1}{2}\left(e^{ix_0(k_1-k_2)} + e^{-ix_0(k_1-k_2)}\right) = \left(\frac{2}{\pi\lambda}\right)^{1/2} e^{-\frac{2k_0^2+k_1^2+k_2^2-2k_0(k_1+k_2)}{4\lambda}} \cos\left((k_1-k_2)x_0\right)\,. \tag{20}$$

(6)

Vedere eq. 3.36-3.69 a pag. 39 del libro di testo.

(7)

La relazione fra operatori alla Heisenberg e alla Schrödinger ci dice che

$$O(t) = e^{i\frac{Ht}{\hbar}} O e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} = e^{i\frac{\hbar k^2 t}{2m}} O e^{-i\frac{\hbar k^2 t}{2m}} = e^{i\frac{\hbar k^2 t}{2m}}\Big(|k_1\rangle\langle k_2| + |k_2\rangle\langle k_1|\Big)e^{-i\frac{\hbar k^2 t}{2m}}\,. \tag{21}$$

Essendo $|k_i\rangle$ autostato dell'operatore k con autovalore k_i abbiamo

$$e^{-i\frac{\hbar k^2 t}{2m}}|k_i\rangle = e^{-i\frac{\hbar k_i^2 t}{2m}}|k_i\rangle\,. \tag{22}$$

Quindi troviamo

$$O(t) = e^{i\frac{\hbar(k_1^2-k_2^2)t}{2m}}|k_1\rangle\langle k_2| + e^{i\frac{\hbar(k_2^2-k_1^2)t}{2m}}|k_2\rangle\langle k_1|\,. \tag{23}$$

(8)

Per poter calcolare la dipendenza dal tempo di $\langle\psi|O|\psi\rangle$ in rappresentazione di Schrödinger, dobbiamo calcolare $|\psi(t)\rangle$. Nella base degli impulsi, l'evoluzione è semplicemente data da

$$\psi(k,t) = \langle k|U(t)|\psi\rangle = \left(\frac{1}{2\pi\lambda}\right)^{1/4} e^{-\frac{i\hbar k^2 t}{2m}} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\lambda}} e^{-ikx_0}, \tag{24}$$

dove abbiamo utilizzato la forma Eq. (19) della funzione d'onda nella base degli impulsi.

Gli stessi passaggi della Eq. (18) portano a

$$\langle\psi|O|\psi\rangle(t) = \int dkdk'\psi^*(k,t)(\delta(k-k_1)\delta(k'-k_2) + \delta(k-k_2)\delta(k'-k_1))\psi^*(k',t) \tag{25}$$

$$= \psi^*(k_1,t)\psi(k_2,t) + \psi^*(k_2,t)\psi(k_1,t) = \tag{26}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\lambda}\right)^{1/2} e^{-\frac{(k_1-k_0)^2}{4\lambda}} e^{-\frac{(k_2-k_0)^2}{4\lambda}} \left(e^{\frac{i\hbar(k_1^2-k_2^2)t}{2m}} e^{i(k_1-k_2)x_0} + e^{\frac{-i\hbar(k_1^2-k_2^2)t}{2m}} e^{-i(k_1-k_2)x_0}\right) \tag{27}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi\lambda}\right)^{1/2} e^{-\frac{(k_1-k_0)^2}{4\lambda}} e^{-\frac{(k_2-k_0)^2}{4\lambda}} \cos\left(\frac{\hbar(k_1^2-k_2^2)t}{2m} + (k_1-k_2)x_0\right)\,. \tag{28}$$

Utilizzando la rappresentazione di Heisenberg, abbiamo

$$\langle\psi|O|\psi\rangle(t) = \langle\psi|k\rangle\langle k|O(t)|k'\rangle\langle k'|\psi\rangle, \tag{29}$$

dove abbiamo sfruttato la Eq. (16). Sostituendo nella Eq. (29) le Eq. (23) e (24) troviamo immediatamente la Eq. (27), dimostrando così l'equivalenza dei due risultati.
(9)
Dobbiamo calcolare $[H, O]$ e imporre che sia uguale a zero. Abbiamo quindi

$$0 = [H, O] = \frac{1}{2m}([p^2, |k_1\rangle\langle k_2|] + [p^2, |k_2\rangle\langle k_1|]) = \tag{30}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}(k_1^2|k_1\rangle\langle k_2| - k_2^2|k_1\rangle\langle k_2| + k_2^2|k_2\rangle\langle k_1| - k_1^2|k_2\rangle\langle k_1|) \tag{31}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}(k_1^2 - k_2^2)(|k_1\rangle\langle k_2| - |k_2\rangle\langle k_1|)\,, \tag{32}$$

da cui si ottiene che la condizione è $k_1^2 = k_2^2$ ossia

$$k_1 = \pm k_2. \tag{33}$$

(10)
Dobbiamo calcolare $[P, O]$ e imporre che sia uguale a 0. Osserviamo innanzitutto che

$$\langle x|P|k\rangle = \langle -x|k\rangle = \langle x| - k\rangle, \tag{34}$$

dove il primo passaggio segue dal fatto che P è hermitiano (cosa che a sua volta si dimostra calcolando l'elemento di matrice di P fra autostati della posizione) e il secondo passaggio segue immediatamente dalla Eq. (12). Ne segue che

$$P|k\rangle = | - k\rangle, \tag{35}$$

Abbiamo quindi

$$0 = [P, O] = [P, |k_1\rangle\langle k_2|] + [P, |k_2\rangle\langle k_1|] = \tag{36}$$

$$= | - k_1\rangle\langle k_2| - |k_1\rangle\langle -k_2| + | - k_2\rangle\langle k_1| - |k_2\rangle\langle -k_1|. \tag{37}$$

Poiché k_1 e k_2 sono generici, questo si annulla solo se $k_1 = -k_2$, oppure $k_1 = -k_1$ e $k_2 = -k_2$. Osserviamo però che la seconda condizione corrisponde a $k_1 = k_2 = 0$ ed è quindi un caso particolare della prima.
Dunque la condizione è

$$k_1 = -k_2. \tag{38}$$

(11)
Se si sceglie $k_1 = -k_2$, è possible soddisfare entrambe le condizioni trovate al punto 9 e al punto 10. Imponendo questa condizione nella definizione di O, si ottiene

$$O = |k_1\rangle\langle -k_1| + | - k_1\rangle\langle k_1|\,. \tag{39}$$

Gli stati in cui il sistema si può trovare dopo la misura sono gli autostati di O. Visto che i tre operatori commutano tutti fra loro, gli autostati devono essere necessariamente autostati simultanei dei tre operatori. Ma gli autostati simultanei dell'impulso e della parità sono gli stati

$$|\phi^{\pm}(k)\rangle = |k\rangle \pm | - k\rangle. \tag{40}$$

D'altra parte l'operatore O Eq. (39) agisce solo nel sottospazio degli autostati dell'impulso aventi $k = \pm k_1$, dunque gli autostati simultanei dei tre operatori devono necessariamente essere gli stati

$$|\phi^{\pm}(k_1)\rangle = |k_1\rangle \pm | - k_1\rangle. \tag{41}$$

Si verifica immediatamente che questi sono effettivamente autostati di O, infatti Infatti

$$O|\phi^{\pm}(k_1)\rangle = O(|k_1\rangle \pm | - k_1\rangle) = | - k_1\rangle \pm |k_1\rangle \tag{42}$$

$$= \mp(|k_1\rangle \pm | - k_1\rangle) = \mp|\phi^{\pm}(k_1)\rangle. \tag{43}$$