

Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA II del 21 aprile 2023

(1) Poiché il sistema può essere separato in sei buche di potenziale unidimensionali, possiamo scrivere

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{(n_1^{(j)})^2 + (n_2^{(j)})^2}{a_j^2} \right) \quad \text{con } n_i^{(j)} = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che le costanti a_j non dipendono da i (cioè dall'indice di particella).

(2) Poiché il sistema è separabile, le autofunzioni possono essere scritte come

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \prod_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}} \psi_{n_i^{(j)}}(x_i^{(j)}), \quad (2)$$

dove $\psi_{n_i^{(j)}}(x_i^{(j)})$ sono le autofunzioni della buca infinita di potenziale, ovvero

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a_j}} \sin\left(\frac{n\pi}{2a_j}x\right) & n \text{ pari;} \\ \sqrt{\frac{1}{a_j}} \cos\left(\frac{n\pi}{2a_j}x\right) & n \text{ dispari.} \end{cases} \quad (3)$$

(3) Nel caso in cui $a_1 = a_2 = a_3 = a$ abbiamo che

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8a^2 m} \left((n_1^{(1)})^2 + (n_2^{(1)})^2 + (n_1^{(2)})^2 + (n_2^{(2)})^2 + (n_1^{(3)})^2 + (n_2^{(3)})^2 \right). \quad (4)$$

• Stato fondamentale:

$$E_0 = 6 \frac{\pi^2 \hbar^2}{8a^2 m} \quad \text{non degenera.} \quad (5)$$

• Primo stato eccitato:

$$E_1 = 9 \frac{\pi^2 \hbar^2}{8a^2 m} \quad \text{degenerazione 6.} \quad (6)$$

La degenerazione del primo stato eccitato è data dal fatto che esso è ottenuto prendendo una a scelta delle sei $n_i^{(j)}$ pari a 2, mentre le altre restano pari a 1.

(4) Visto che la hamiltoniana non contiene contributi dello spin e che le particelle sono non identiche, lo spettro rimane invariato. Vi sono tuttavia ora quattro stati di spin per ogni autostato di energia, e quindi la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato si ottengono moltiplicando per 4 quelle del caso precedente (quindi 4 per lo stato fondamentale e 24 per il primo stato eccitato).

(5) La hamiltoniana data può essere riscritta come

$$H = H_0 + \frac{\lambda}{2\hbar^2} (S_{tot}^2 - S_1^2 - S_2^2). \quad (7)$$

Usando il fatto che le particelle sono di spin 1/2, troviamo

$$H = H_0 + \frac{\lambda}{2\hbar^2} \left(S_{tot}^2 - \hbar^2 \frac{3}{2} \right) \quad (8)$$

Lo spettro di autovalori di energia è quindi

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8a^2 m} \left((n_1^{(1)})^2 + (n_2^{(1)})^2 + (n_1^{(2)})^2 + (n_2^{(2)})^2 + (n_1^{(3)})^2 + (n_2^{(3)})^2 \right) + \frac{\lambda}{2} \left(s(s+1) - \frac{3}{2} \right) \quad (9)$$

con $s = 0, 1$.

(6)

Paragrafo 11.2.4 del libro di testo.

(7)

Il termine aggiuntivo può essere scritto usando la forma esplicita di \vec{B} :

$$H' = H_0 + \frac{\mu}{\hbar} B_x (s_{1x} + s_{2x}). \quad (10)$$

Il problema chiede la probabilità che, misurando $s_{1z} = 1/2$ al tempo iniziale $t = 0$, si misuri lo stesso valore al tempo finale $t = T$. Dato che l'hamiltoniana è separabile in tre pezzi che commutano, ovvero H_0 , $\frac{\mu}{\hbar} B_x s_{1x}$ e $\frac{\mu}{\hbar} B_x s_{2x}$, le autofunzioni saranno date dal prodotto delle autofunzioni dei tre pezzi distinti e l'evoluzione temporale potrà essere separata in

$$\exp(-iH'T/\hbar) = \exp(-iH_0T/\hbar) \exp(-i\kappa\sigma_{1x}) \exp(-i\kappa\sigma_{2x}), \quad (11)$$

dove σ_x è la prima matrice di Pauli e si è posto $\kappa = \mu B_x T / (2\hbar)$. Poiché siamo interessati solo all'autovalore dello spin della prima particella, dobbiamo sommare su tutte le possibilità degli altri autovalori. Ma poiché questi sono normalizzati a 1 possiamo considerare l'evoluzione come se fosse data solamente dal pezzo in s_{1x} e omettere gli altri. In conclusione dobbiamo calcolare

$$P = |\langle s_{1z} = \frac{1}{2} | \exp(-i\kappa s_{1x}) | s_{1z} = \frac{1}{2} \rangle|^2. \quad (12)$$

Si ottiene facilmente che

$$\exp(-i\kappa s_{1x}) = \mathbb{1} \cos \kappa - i\sigma_x \sin \kappa \quad (13)$$

e quindi si ottiene infine $P = \cos^2\left(\frac{\mu B_x T}{2\hbar}\right)$

(8)

Nel caso in cui le particelle siano identiche e abbiano spin 0 la funzione d'onda totale deve essere simmetrica. Poiché le due particelle hanno spin zero, la parte di spin dell'hamiltoniana si annulla e lo spettro rimane lo stesso della domanda (3) dove però bisogna considerare solo le combinazioni simmetriche delle funzioni d'onda spaziali. Quindi sia lo stato fondamentale che il primo stato eccitato sono gli stessi che nella domanda (3).

Nel caso in cui le particelle sono identiche e abbiano spin 1/2, la funzione d'onda totale deve essere antisimmetrica. Considerando la base degli spin totali $|S_{tot} S_z\rangle$, cioè

$$|11\rangle = |++\rangle \quad (14)$$

$$|1-1\rangle = |--\rangle \quad (15)$$

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-+\rangle + |+-\rangle) \quad (16)$$

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-+\rangle - |+-\rangle), \quad (17)$$

vediamo che con $S_{tot} = 1$ la funzione d'onda di spin è simmetrica mentre per $S_{tot} = 0$ è antisimmetrica.

Osserviamo innanzitutto che visto che λ è positiva l'energia del tripletto è sempre più alta di quella del singoletto a parità di energia della parte spaziale.

Se consideriamo il singoletto $S_{tot} = 0$ dobbiamo quindi prendere una funzione d'onda spaziale simmetrica. Se quindi prendiamo $\psi_{111}(\vec{x}_1)\psi_{111}(\vec{x}_2)$ (con cui si intende la funzione d'onda spaziale ottenuta con tutti gli $n_i = 1$) otteniamo certamente lo stato fondamentale perchè sia la parte spaziale che la parte di spin contribuiscono con il loro valore minimo possibile di energia.

Per costruire il primo eccitato, consideriamo due possibilità, a seconda che la funzione d'onda di spin sia nello stato di tripletto o nello stato di singoletto. Se è nello stato di singoletto per la parte spaziale possiamo prendere il primo stato eccitato di H_0 come nella domanda 8, prendendo combinazioni simmetriche delle autofunzioni. Se la funzione d'onda di spin è nello stato di tripletto, la funzione d'onda spaziale deve essere antisimmetrica, e quindi non può corrispondere allo stato avente energia E_0 Eq. (5), che è completamente simmetrica. Quindi in questo caso l'energia della parte spaziale deve essere almeno E_1 Eq. (6). Ma visto che l'energia della parte di spin del tripletto è maggiore di quella del singoletto l'energia in questo caso è maggiore che nel caso precedente, e questo non è mai il primo stato eccitato, qualunque siano i valori di a_i e λ .

In definitiva troviamo che in questo caso le energie dello stato fondamentale e del primo stato eccitato sono

$$\bar{E}_i = E_i - \frac{3}{4}\lambda, \quad (18)$$

con $i = 0, 1$ ed E_0, E_1 dati dalle Eq. (5,6). Il risultato non dipende dai valori di a_i e λ , purché si abbia $\lambda > 0$.

(9) La hamiltoniana che dobbiamo considerare è $H = H_0 + V_p$, dove V_p può essere riscritto come

$$V_p = B_x(L_{1,x} + L_{2,x} + s_{1,x} + s_{2,x}). \quad (19)$$

Senza perdere di generalità possiamo usare la base in cui $L_x^{\text{tot}} = L_{1,x} + L_{2,x}$ e $s_x^{\text{tot}} = s_{1,x} + s_{2,x}$ sono diagonali.

Lo stato fondamentale del sistema dato da H_0 ha energia $E_0 = 6\pi^2\hbar^2/8a^2m$ ed è relativo ad uno stato con tutti gli n_i uguali a 1. Visto che H_0 non dipende dallo spin e la particelle sono non identiche, le due particelle possono avere qualunque valore dello spin.

La variazione di energia che si deve calcolare al primo ordine è quindi data da

$$\Delta_E = \langle E_0 | V_p | E_0 \rangle. \quad (20)$$

Si vede immediatamente che nello stato dato il valor medio del momento angolare lungo qualunque asse si annulla, ad esempio usando la simmetria. Ne segue che

$$\Delta_E = B_z s_x^{\text{tot}}, \quad (22)$$

dove s_x^{tot} può prendere i valori -1, 0, 1.

(10) Nel caso di spin 0, lo stato fondamentale è non degenere e la funzione d'onda è manifestamente simmetrica. Per il primo stato eccitato, delle sei funzioni d'onda della domanda (3) dobbiamo prendere solo le tre combinazioni simmetriche che si possono costruire, ad esempio $\psi_{211}(\vec{x}_1)\psi_{111}(\vec{x}_2) + \psi_{111}(\vec{x}_1)\psi_{211}(\vec{x}_2)$. Dunque viene rimossa la degenerazione di scambio, corrispondente allo scambio delle due particelle, ma rimane una degenerazione uguale a 3 corrispondente alla scelta di quale dei tre spettri di buca unidimensionale viene eccitato.

Nel caso di spin $\frac{1}{2}$ come si è visto nella domanda (8) la funzione d'onda di spin è antisimmetrica sia nello stato fondamentale che nel primo stato eccitato, dunque la funzione d'onda spaziale è simmetrica e quindi la degenerazione è la medesima che nel caso di spin 0.

(11)

Nel caso in cui la misura di spin dia $S_{tot} = 0$ la funzione d'onda di spin è simmetrica, dunque il minimo valore possibile dell'energia corrisponde allo stato fondamentale della domanda (8) e la funzione d'onda spaziale è data da

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \psi_{111}(\vec{x}_1)\psi_{111}(\vec{x}_2). \quad (23)$$

La densità di probabilità di trovare entrambe le particelle nell' origine è

$$p = |\psi_1(x_1 = 0)\psi_1(y_1 = 0)\psi_1(z_1 = 0)\psi_1(x_2 = 0)\psi_1(y_2 = 0)\psi_1(z_2 = 0)|^2 = \quad (24)$$

$$= \frac{1}{a^6}. \quad (25)$$

Nel caso in cui si misura $S_{tot} = 1$, dato che la parte spaziale è una funzione completamente antisimmetrica per scambio di \vec{x}_1 e \vec{x}_2 , qualunque sia il risultato della misura successiva di energia la densità di probabilità di posizione di trovare entrambe le particelle nello stesso punto dello spazio si annulla (principio di Pauli).