

# Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA II del 23 aprile 2025

- (1) Definiamo le coordinate relative e baricentrali per gli operatori posizione e impulso nel caso di due particelle di uguale massa:

$$\begin{aligned}\vec{R} &\equiv \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2} & \vec{P} &\equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ \vec{r} &\equiv \vec{x}_1 - \vec{x}_2 & \vec{p} &\equiv \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}\end{aligned}\quad (1)$$

e l'Hamiltoniana  $H_0$  diventa pertanto

$$H_0 = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(\vec{r}) \equiv H_B(\vec{P}) + H_{rel}(\vec{p}, \vec{r}) \quad (2)$$

Con  $M = 2m$  e  $\mu = m/2$ .

- (2) L'Hamiltoniana baricentrale rappresenta una particella libera di massa  $M$ . L'Hamiltoniana relativa rappresenta una particella di massa  $\mu$  all'interno di una buca tridimensionale cubica centrata in  $\vec{r} = 0$  e di lato  $2L$ . Lo spettro del problema è pertanto:

$$E_{\vec{P}, n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2 |\vec{P}|^2}{2M} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{8\mu L^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \quad n_i = 1, 2, 3 \dots \quad (3)$$

Limitandosi allo spettro discreto dell'Hamiltoniana relativa, lo stato fondamentale è dato dall'unica configurazione di numeri quantici  $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ , pertanto la sua degenerazione è 1. Il primo stato eccitato si ottiene invece promuovendo uno qualsiasi degli  $n_i$  a 2: dato che le possibili scelte sono 3, la degenerazione del primo stato eccitato è pari a 3.

- (3) Ricordando le autofunzioni di buca di potenziale unidimensionale:

$$\psi_n(x) = 0 \quad \text{per} \quad |x| \geq L \quad (4)$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}} \cos(k_n x) & n \text{ dispari} \\ \frac{1}{\sqrt{L}} \sin(k_n x) & n \text{ pari} \end{cases} \quad \text{per} \quad |x| < L \quad (5)$$

con  $k_n \equiv n\pi/2L$ , le autofunzioni dell'hamiltoniana relativa sono:

$$\langle \vec{r} | \psi_{n_1 n_2 n_3} \rangle = \psi_{n_1}(r^{(1)}) \psi_{n_2}(r^{(2)}) \psi_{n_3}(r^{(3)}) \quad (6)$$

- (4) A priori, il sistema può trovarsi in una generica combinazione di autostati di energia, dato che gli stati  $|n_1 n_2 n_3\rangle$  formano una base ortonormale esclusiva ed esaustiva. Consideriamo ora la definizione dell'operatore  $O$  e introduciamo la notazione vettoriale:

$$|111\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \quad |112\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \quad |121\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad \text{etc.} \quad (7)$$

In questa notazione, l'operatore  $O$  ha forma matriciale (infinito-dimensionale):

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (8)$$

I possibili risultati di misura sono pertanto dati dagli autovalori della matrice, ovvero  $o = -1, 0, 1$ . Se l'autovalore  $o = 0$  è già esplicito, gli autovalori  $o = \pm 1$  si possono calcolare diagonalizzando la matrice bidimensionale nell'angolo in alto a sinistra.

Dopo la misura, il sistema si troverà nell'autospazio realtivo all'autovalore osservato. Per i due autovalori diversi da zero abbiamo

$$|\phi\rangle_{o=1} = |\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|111\rangle + |112\rangle)$$

$$|\phi\rangle_{o=-1} = |\phi_{-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|111\rangle - |112\rangle)$$
(9)

dove gli autostati sono normalizzati e definiti a meno di una fase arbitraria.

(5) Svilgendo l'algebra, le probabilità sono:

$$P_1 = |\langle\phi_1|\psi\rangle|^2 = \frac{2}{3}$$

$$P_{-1} = |\langle\phi_{-1}|\psi\rangle|^2 = 0$$

$$P_0 = |\langle\phi_0|\psi\rangle|^2 = 1 - \frac{2}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$
(10)

Si può controllare il risultato di  $P_0$  verificando che

$$\frac{1}{3} = |\langle\phi_0|\psi\rangle|^2 = |\langle\psi|\Pi_0^\dagger|\psi\rangle|^2 = |\langle\psi|\Pi_0|\psi\rangle|^2 =$$

$$\frac{1}{3}|(\langle 111| + \langle 112| + \langle 121|)(Id - |111\rangle\langle 111| - |112\rangle\langle 112|)(|111\rangle + |112\rangle + |121\rangle)|^2,$$
(11)

dove  $\Pi_0$  è il proiettore sull'autospazio infinito-dimensionale associato a  $o = 0$ :

$$\Pi_0 \equiv \mathcal{K} - |\phi_1\rangle\langle\phi_1| - |\phi_{-1}\rangle\langle\phi_{-1}| = \mathcal{K} - |111\rangle\langle 111| - |112\rangle\langle 112|.$$
(12)

(6) Pagina 171, sezione 9.2.1 del libro di testo.

(7) Nel caso  $\lambda = 0$ , l'unica differenza rispetto al risultato della domanda (2) è che le due particelle sono dotate di spin 1/2. Segue che gli autovalori di energia degli stati fondamentale e primo eccitato sono invariati:

$$E_{FOND} = E_{1,1,1} = 3 \frac{\hbar^2 \pi^2}{8\mu L^2} \quad E_{1^0} = E_{1,1,2} = E_{1,2,1} = E_{2,1,1} = 6 \frac{\hbar^2 \pi^2}{8\mu L^2}$$
(13)

mentre la degenerazione deve essere moltiplicata per un fattore  $(2s_1 + 1)(2s_2 + 1) = 4$ : lo stato fondamentale ha deg=4 e il primo eccitato ha deg=12.

Nel caso  $\lambda \neq 0$  introduciamo lo spin totale per le particelle 1 e 2,  $\vec{s} \equiv \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ , e scriviamo:

$$H_s = \frac{\lambda}{2} (|\vec{s}|^2 - |\vec{s}_1|^2 - |\vec{s}_2|^2)$$
(14)

Eseguiamo quindi un cambio di base dalla base di autostati  $|n_1 n_2 n_3 s_1 s_2 s_{1z} s_{2z}\rangle$  alla nuova base  $|n_1 n_2 n_3 s s_z s_1 s_2\rangle$ . Per costruzione lo spin totale può assumere i valori  $s = 0, 1$ , mentre  $s_z = -s, -s+1, \dots, s$ , introducendo una degenerazione di spin pari a  $(2s+1)$ . Lo spettro è quindi:

$$E_{n_1, n_2, n_3, s} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8\mu L^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) + \frac{\lambda}{2} \left( s(s+1) - \frac{3}{2} \right) \quad (15)$$

Per trovare le energie di stato fondamentale e primo eccitato è necessario distinguere tra i valori che può assumere  $\lambda$ .

La condizione data nel testo implica che la separazione dei livelli della hamiltoniana di spin è più piccola della separazione dei livelli della hamiltoniana spaziale. Pertanto lo stato fondamentale e il primo stato eccitato sono sempre lo stato fondamentale spaziale, e l'uno o l'altro dei due stati di spin a seconda del segno di  $\Lambda$ : se  $\lambda > 0$

$$E_0 = E_{1,1,1,0} = 3 \frac{\hbar^2 \pi^2}{8\mu L^2} - \frac{3\lambda}{4} \quad \text{deg} = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \quad (16)$$

$$E_1 = E_{1,1,1,1} = 3 \frac{\hbar^2 \pi^2}{8\mu L^2} + \frac{\lambda}{4} \quad \text{deg} = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad (17)$$

mentre se  $\lambda < 0$  i stato fondamentale e primo stato eccitato sono scambiati.

- (8) Il primo stato eccitato dell'Hamiltoniana relativa, ignorando lo spin, presentava una degenerazione pari a 3. Come base dell'autospazio degenerare possono essere considerati gli stati  $|112\rangle, |121\rangle$  e  $|211\rangle$ . Per ottenere la correzione all'energia dovuta al termine di perturbazione  $V$  è perciò necessario trovare gli autovalori della matrice

$$M = \begin{pmatrix} \langle 112|V|112\rangle & \langle 112|V|121\rangle & \langle 112|V|211\rangle \\ \langle 121|V|112\rangle & \langle 121|V|121\rangle & \langle 121|V|211\rangle \\ \langle 211|V|112\rangle & \langle 211|V|121\rangle & \langle 211|V|211\rangle \end{pmatrix} \quad (18)$$

Riconosciamo che nel nostro sistema di coordinate  $V = \epsilon r^{(3)}$ , e per semplicità ridefiniamo  $x \equiv r^{(1)}, y \equiv r^{(2)}, z \equiv r^{(3)}$ . Ricordando la formula delle autofunzioni di energia trovate alla domanda (3) possiamo calcolare tutti gli elementi di matrice, come per esempio:

$$\langle 112|\epsilon z|112\rangle = \frac{1}{L^3} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} dx dy dz z \cos^2 \frac{x\pi}{2L} \cos^2 \frac{y\pi}{2L} \sin^2 \frac{z\pi}{L} \quad (19)$$

Dato che  $V$  agisce solo come la componente spaziale  $z$  e il sistema è stato separato in coordinate cartesiane, possiamo sempre scrivere

$$\langle n_1 n_2 n_3 | z | n_1 n_2 n_3 \rangle = \langle n_1 | n_1 \rangle \langle n_2 | n_2 \rangle \langle n_3 | z | n_3 \rangle \quad (20)$$

e concentrarci solo sull'integrazione in  $dz$ .

Ci servono quindi:

$$\begin{aligned} \langle 1|\epsilon z|1\rangle &= \frac{\epsilon}{L} \int_{-L}^{+L} dz z \cos^2 \frac{z\pi}{2L} = 0 \\ \langle 2|\epsilon z|2\rangle &= \frac{\epsilon}{L} \int_{-L}^{+L} dz z \sin^2 \frac{z\pi}{L} = 0 \\ \langle 1|\epsilon z|2\rangle &= \frac{\epsilon}{L} \int_{-L}^{+L} dz z \sin \frac{z\pi}{L} \cos \frac{z\pi}{2L} = \frac{32L}{9\pi^2} \epsilon = \langle 2|\epsilon z|1\rangle \end{aligned} \quad (21)$$

dove i primi due integrali sono di funzioni dispari su dominio pari e per l'ultimo abbiamo usato il suggerimento e che il risultato è un numero reale. Quindi gli unici elementi di matrice nonnulli sono quelli fra stati aventi diverso valore di  $n_3$ . Tuttavia, notiamo che qualunque coppia di stati avente un diverso valori di  $n_3$  deve anche avere un diverso valori o di  $n_1$  o di  $n_2$ . Ma usando la Eq.( 20) si vede immediatamente che l'ortonormalità degli stati di buca implica che anche questi elementi di matrice si annullano.

Ad esempio

$$\begin{aligned}\langle 112|V|121\rangle &= \langle 1|1\rangle\langle 1|2\rangle\langle 2|z|1\rangle & (22) \\ &= \langle 1|2\rangle\frac{32L}{9\pi^2} = 0. & (23)\end{aligned}$$

Concludiamo che la perturbazione al primo ordine non ha effetto, e non rimuove la degenerazione.

- (9) Osserviamo preliminarmente che dopo una misura di spin lungo l'asse  $z$  il sistema si trova su uno dei due autostati  $|\pm\rangle$  di  $s_{1z}$ , con autovalore  $\pm 1/2$ . Notiamo quindi che l'operatore di perturbazione  $V$  nella base degli autostati di  $s_{1z}$  ha la forma

$$V = \epsilon \vec{s}_1 \cdot \vec{r} = \epsilon(s_{1x}x + s_{1y}y + s_{1z}z) = \frac{\epsilon\hbar}{2}(\sigma_1x + \sigma_2y + \sigma_3z) = \frac{\epsilon\hbar}{2} \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \quad (24)$$

dove  $\sigma_i$  sono le matrici di Pauli. Ne segue immediatamente che in un autostato di  $s_{1z}$

$$\langle \pm|V|\pm\rangle = \pm \frac{\epsilon\hbar}{2}z. \quad (25)$$

Ne segue che la prturbazione è la stessa della domanda precedente e dunque l'effetto è lo stesso.

- (10) Possiamo riutilizzare i calcoli della domanda (4), concentrandoci per prima cosa sull'autospazio di  $|n_3\rangle$ . Avremo:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \quad etc. \quad (26)$$

e in questa notazione, l'operatore  $O'$  ha la stessa forma di  $O$ :

$$O' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (27)$$

con gli stessi autovalori  $o' = 1, 0, -1$ .

Passando invece allo spazio degli stati  $|n_1n_2\rangle$ , l'operatore  $O'$  agisce come operatore identità, per cui ogni stato è autostato con autovalore 1. Se definiamo gli autostati in spazio  $|n_3\rangle$ :

$$|\pm\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle \pm |2\rangle) \quad (28)$$

e definendo  $|\psi'\rangle$  lo stato del sistema prima della misura e  $|\psi'_{12}{}^{\pm,0}\rangle$  le sue proiezioni (normalizzate) sullo spazio di  $|n_1n_2\rangle$  a seconda del ket nello spazio di  $|n_3\rangle$ , gli autostati di  $O'$  saranno gli stati fattorizzati:

$$\begin{aligned}|\phi'_1\rangle &= |\psi'_{12}{}^+\rangle \otimes |+\rangle & |\phi'_{-1}\rangle &= |\psi'_{12}{}^-\rangle \otimes |-\rangle \\ |\phi'_0\rangle &= |\psi'_{12}{}^0\rangle \otimes \sum_{j=3}^{\infty} c_j |j\rangle = \Pi'_0 |\psi'\rangle\end{aligned} \quad (29)$$

con  $\Pi'_0 = Id - |\phi'_1\rangle\langle\phi'_1| - |\phi'_{-1}\rangle\langle\phi'_{-1}|$ . Le relative matrici densità sono:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= |\psi'_{12}^+\rangle \otimes |+\rangle\langle +| \otimes \langle\psi'_{12}^+| \\ \rho_2 &= |\psi'_{12}^-\rangle \otimes |-\rangle\langle -| \otimes \langle\psi'_{12}^-| \\ \rho_3 &= \Pi'_0 |\psi'\rangle\langle\psi'| \Pi_0^\dagger\end{aligned}\quad (30)$$

- (11) Se il sistema si trova in  $|\psi\rangle$  della domanda (5), come detto, l'operazione di misura non riguarda lo spazio di  $|n_1 n_2\rangle$ . Riscriviamo allora  $|\psi\rangle$  fattorizzando gli spazi di Hilbert e individuando due stati esclusivi nello spazio  $|n_3\rangle$ :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|11\rangle + |12\rangle) \otimes \sqrt{2}|1\rangle + |11\rangle \otimes |2\rangle \right] \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ |\psi_{12}\rangle \otimes \sqrt{2}|1\rangle + |\tilde{\psi}_{12}\rangle \otimes |2\rangle \right] \quad (31)$$

Per calcolare le probabilità è pertanto sufficiente concentrarsi sulla terza direzione:

$$\begin{aligned}P_1 &= |\langle\phi'_1|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{6} \left| (\langle 1| + \langle 2|)\sqrt{2}|1\rangle + (\langle 1| + \langle 2|)|2\rangle \right|^2 = \frac{1}{6} |1 + \sqrt{2}|^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \\ P_{-1} &= |\langle\phi'_2|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{6} \left| (\langle 1| - \langle 2|)\sqrt{2}|1\rangle + (\langle 1| - \langle 2|)|2\rangle \right|^2 = \frac{1}{6} |1 - \sqrt{2}|^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\end{aligned}\quad (32)$$

$$P_0 = 0$$

(Non richiesto) Dato che il sistema si trova inizialmente in uno stato non fattorizzato, per ricavare i possibili autostati di misura è necessario scomporre  $|\psi\rangle$  nella base dei risultati lungo  $|n_3\rangle$ :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \left( |\psi_{12}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\tilde{\psi}_{12}\rangle \right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) + \left( |\psi_{12}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\tilde{\psi}_{12}\rangle \right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \right] \quad (33)$$

ed estrarre (normalizzando) le proiezioni  $|\psi_{12}^+\rangle$  e  $|\psi_{12}^-\rangle$ .