

Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA II del 09 luglio 2025

- (1) Gli autostati dell'hamiltoniana H_0 coincidono con quelli dell'operatore $\vec{L}^2$, tali che

$$\vec{L}^2|\ell\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|\ell\rangle \quad \text{con } \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

perciò lo spettro (degenere) di autovalori è

$$E_\ell = \mu\hbar^2\ell(\ell+1) \quad \text{con } \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

- (2) La degenerazione è dovuta al fatto che possiamo diagonalizzare simultaneamente $\vec{L}^2$ e L_z , definendo gli autostati come $|\ell m\rangle$. Poichè E_ℓ non dipende da m e $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$, ogni autovalore E_ℓ ha degenerazione:

$$\text{deg}_\ell = (2\ell + 1) \quad (3)$$

- (3) Lo stato fondamentale è dato dal valore di ℓ per cui l'energia è minima, perciò $\ell = 0$. Le autofunzioni nella posizione (in coordinate polari) dell'operatore momento angolare sono le armoniche sferiche: $\langle\theta\phi|\ell m\rangle = Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$. Lo stato con $\ell = 0$ ha momento angolare nullo e quindi è isotropo e dunque indipendente dagli angoli. È dunque pari ad una costante, fissata per normalizzazione:

$$\langle\theta\phi|\psi_{FOND}\rangle = \langle\theta\phi|00\rangle = Y_{0,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (4)$$

- (4) Dato che la particella è dotata di spin, per determinare lo spettro di autovalori eseguiamo la composizione di $\vec{L}$ ed $\vec{s}$, definendo il momento angolare totale $\vec{J} = \vec{L} + \vec{s}$. Passiamo perciò dalla base di autostati $|\ell m s s_z\rangle$ alla nuova base $|j j_z \ell s\rangle$, con $j = |\ell - s|, |\ell - s| + 1, \dots, \ell + s$, e scriviamo:

$$H = \mu\vec{L}^2 + \frac{B}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{s}^2) \quad (5)$$

Lo spettro di autovalori è quindi

$$E_{j,j_z,\ell,s} = \hbar^2 \left[\mu\ell(\ell+1) + \frac{B}{2}(j(j+1) - s(s+1) - \ell(\ell+1)) \right] \quad (6)$$

con degenerazione dovuta al fatto che l'energia non dipende da $j_z = -j, -j+1, \dots, j$: $\text{deg} = (2j+1)$.

Con $s = \frac{1}{2}$, separiamo il caso $\ell = 0 \implies j = \frac{1}{2}$ e $\ell \neq 0 \implies j = \ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}$.
Abbiamo:

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2},j_z,0,\frac{1}{2}} &= 0 & \text{deg} &= 2 \\ E_{\ell+\frac{1}{2},j_z,\ell,\frac{1}{2}} &= \hbar^2\ell \left[\mu(\ell+1) + \frac{B}{2} \right] & \text{deg} &= 2(\ell + \frac{1}{2}) + 1 = 2(\ell+1) \\ E_{\ell-\frac{1}{2},j_z,\ell,\frac{1}{2}} &= \hbar^2(\ell+1) \left[\mu\ell - \frac{B}{2} \right] & \text{deg} &= 2(\ell - \frac{1}{2}) + 1 = 2\ell \end{aligned} \quad (7)$$

- (5) Calcoliamo i commutatori nel caso $\mu = 0$, ricordando che lo spin commuta con gli operatori posizione ed impulso e che per un generico operatore vettoriale $\vec{v}$ vale $[L_i, v_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}v_k$:

$$\begin{aligned} [H, x_i] &= [Bs_j L_j, x_i] = i\hbar Bs_j \epsilon_{jik} x_k = -i\hbar B \epsilon_{ijk} s_j x_k = -i\hbar B (\vec{s} \times \vec{x})_i \\ [H, p_i] &= [Bs_j L_j, p_i] = i\hbar Bs_j \epsilon_{jik} p_k = -i\hbar B \epsilon_{ijk} s_j p_k = -i\hbar B (\vec{s} \times \vec{p})_i \end{aligned} \quad (8)$$

Dell'equazione di Heisenberg $\frac{d}{dt}O(t) = \frac{i}{\hbar}[H, O(t)]$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{x}(t) &= B(\vec{s} \times \vec{x}(t)) \\ \frac{d}{dt}\vec{p}(t) &= B(\vec{s} \times \vec{p}(t))\end{aligned}\tag{9}$$

(6) Pagine 216-217, sezione 10.5.2 del libro di testo.

(7) Per ipotesi, dopo la misura il sistema si trova nell'autostato $|\psi\rangle \equiv |1-1\rangle$. Notiamo che l'operatore L_w ha elementi di matrice nonnulli solo fra gli stati con $\ell = 1$ e $m = -1, 0$. In questo sottospazio possiamo rappresentare l'operatore come una matrice 2×2 :

$$L_w = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\tag{10}$$

Dopo la misura di L_w , il sistema si trova in uno dei suoi autostati, che possiamo calcolare diagonalizzando la matrice, insieme ai relativi autovalori, che sono i possibili risultati di misura:

$$\begin{aligned}|\phi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1-1\rangle + i|10\rangle) \quad \text{tale che} \quad L_w|\phi_1\rangle = -|\phi_1\rangle \\ |\phi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1-1\rangle - i|10\rangle) \quad \text{tale che} \quad L_w|\phi_2\rangle = +|\phi_2\rangle\end{aligned}\tag{11}$$

Le probabilità richieste sono:

$$\begin{aligned}P_i &= |\langle\phi_1|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2} \\ P_{-i} &= |\langle\phi_2|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{12}$$

(8) Il primo stato eccitato $|1m\rangle$ è tre volte degenere, perciò possiamo calcolare la correzione al primo ordine all'energia diagonalizzando la matrice:

$$\begin{aligned}M &= \begin{pmatrix} \langle 1-1|H_p|1-1\rangle & \langle 1-1|H_p|10\rangle & \langle 1-1|H_p|11\rangle \\ \langle 10|H_p|1-1\rangle & \langle 10|H_p|10\rangle & \langle 10|H_p|11\rangle \\ \langle 11|H_p|1-1\rangle & \langle 11|H_p|10\rangle & \langle 11|H_p|11\rangle \end{pmatrix} = \\ &\frac{\epsilon}{2} \begin{pmatrix} \langle 1-1|L_+ + L_-|1-1\rangle & \langle 1-1|L_+ + L_-|10\rangle & \langle 1-1|L_+ + L_-|11\rangle \\ \langle 10|L_+ + L_-|1-1\rangle & \langle 10|L_+ + L_-|10\rangle & \langle 10|L_+ + L_-|11\rangle \\ \langle 11|L_+ + L_-|1-1\rangle & \langle 11|L_+ + L_-|10\rangle & \langle 11|L_+ + L_-|11\rangle \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{13}$$

dove abbiamo ricordato gli operatori di innalzamento e abbassamento $L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$ tali che

$$L_{\pm}|\ell m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)}|\ell m \pm 1\rangle\tag{14}$$

Troviamo perciò:

$$M = \frac{\epsilon\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\tag{15}$$

i cui autovalori $\pm\epsilon\hbar, 0$ forniscono le correzioni all'energia di primo stato eccitato:

$$\Delta E_{1^o,1}^{(1)} = +\epsilon\hbar \quad \Delta E_{1^o,2}^{(1)} = 0 \quad \Delta E_{1^o,3}^{(1)} = -\epsilon\hbar\tag{16}$$

Dato che le correzioni all'energia sono differenti, la degenerazione è risolta dalla perturbazione al primo ordine.

(9) Sfruttando i risultati del punto (7), dopo la misura di L_w il sistema si trova nello stato

$$|\psi(0)\rangle = |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1-1\rangle - i|10\rangle) \quad (17)$$

Lo stato evoluto al tempo t in notazione di Schrodinger si ottiene esponenziando H :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}t(\mu\bar{L}^2 + BL_z)}(|1-1\rangle + i|10\rangle) \quad (18)$$

Segue che la probabilità richiesta è

$$P = |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}|e^{-2i\hbar\mu t}(e^{iBt} + 1)|^2 = \cos^2 \frac{Bt}{2} = \frac{1 + \cos(Bt)}{2} \quad (19)$$

(10) Per ipotesi, dopo la misura il sistema si trova nello stato iniziale $|i\rangle = |1-1\rangle$. In teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, l'ampiezza di probabilità di transizione al primo ordine in λ dovuta all'interazione H' risulta essere:

$$A_{f,i}^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \langle f|H'(t')|i\rangle e^{\frac{1}{i\hbar}(E_i - E_f)t'} \quad (20)$$

Poichè ci viene richiesta la probabilità di transizione verso un generico stato finale $|f\rangle = |\ell m\rangle$ calcoliamo:

$$\begin{aligned} A_{|\ell m\rangle, |1-1\rangle}^{(1)} &= \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \langle \ell m | \lambda L_x | 1-1 \rangle e^{-t'/\tau} e^{i\hbar(\ell(\ell+1)-2)t'} \\ &= \frac{\lambda}{2i\hbar} \langle \ell m | (L_+ + L_-) | 1-1 \rangle \int_0^t dt' e^{i\hbar(\ell(\ell+1)-2)t'-t'/\tau} \end{aligned} \quad (21)$$

E perciò le probabilità di transizione al primo ordine sono tutte nulle tranne

$$P_{|10\rangle}^{(1)} = |A_{|10\rangle, |1-1\rangle}^{(1)}|^2 = \frac{\lambda^2}{2} \left| \int_0^t dt' e^{-t'/\tau} \right|^2 \quad (22)$$

(11) Il quesito può essere risolto in due modi equivalenti. Innanzitutto, per un generico stato $|\psi\rangle$, poichè vale $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$, il principio di indeterminazione afferma che:

$$\Delta^2 L_x \Delta^2 L_y \geq \frac{\hbar^2}{4} |\langle \psi | L_z | \psi \rangle|^2. \quad (23)$$

Ci chiediamo quindi se esistono stati $|\ell m_0\rangle$ *range* per cui

$$\Delta^2 L_x \Delta^2 L_y \stackrel{?}{=} \frac{\hbar^2}{4} m_0^2. \quad (24)$$

Primo metodo Sappiamo che valore medio di L_x ed L_y in un autostato di L_z è nullo. Inoltre il valore medio di L_x^2 è L_y^2 deve essere uguale, perché possiamo sempre scambiare gli assi x e y con una rotazione attorno all'asse z che lascia il valore medio invariato. Ne segue che

$$\begin{aligned} \Delta^2 L_x &= \Delta^2 L_y = \langle \ell m | L_x^2 | \ell m \rangle = \langle \ell m | L_y^2 | \ell m \rangle = \frac{1}{2} \langle L_x^2 + L_y^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle L^2 - L_z^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2} (\ell(\ell+1) - m^2) \end{aligned} \quad (25)$$

Il prodotto $\Delta^2 L_x \Delta^2 L_y$ assume il valor minimo in corrispondenza di:

$$(\Delta^2 L_x \Delta^2 L_y)_{min} = (\Delta^2 L_x \Delta^2 L_y)_{m=\pm\ell} = \frac{\hbar^4 m^2}{4}. \quad (26)$$

Si vede che questo è proprio il valore che soddisfa la Eq. (24).

In conclusione, gli stati cercati sono gli autostati di L_z con $m = \pm\ell$, cioè gli stati $|\ell \pm \ell\rangle$.

Secondo metodo Ricordando la dimostrazione del principio di indeterminazione, abbiamo che la richiesta di minima indeterminazione risulta essere

$$\langle \psi | A^2 | \psi \rangle \langle \psi | B^2 | \psi \rangle = |\langle \psi | AB | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|^2 \quad (27)$$

che può essere soddisfatta se e solo se

$$A|\psi\rangle = i\lambda B|\psi\rangle, \quad (28)$$

con λ reale.

Nel nostro caso, ricordando che in un autostato di L_z il valor medio di L_x e L_y è nullo, abbiamo

$$L_x|\ell m\rangle = i\lambda L_y|\ell m\rangle. \quad (29)$$

Ma $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$ e $L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$. Ne segue che se $m \neq \pm\ell$ la condizione è

$$C_{\ell m}^+|\ell m + 1\rangle + C_{\ell m}^-|\ell m - 1\rangle \stackrel{?}{=} \lambda (C_{\ell m}^+|\ell m + 1\rangle - C_{\ell m}^-|\ell m - 1\rangle), \quad (30)$$

dove $C_{\ell m}^\pm = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)+m(m\pm 1)}}$. La condizione non può essere soddisfatta per alcun valore di λ . Ma per $m = \pm\ell$ si ha

$$|\ell\ell - 1\rangle = \lambda(-|\ell\ell - 1\rangle) \quad (31)$$

$$|\ell - \ell + 1\rangle = \lambda(|\ell - \ell + 1\rangle) \quad (32)$$

rispettivamente soddisfatte con $\lambda = \pm 1$. Di nuovo concludiamo che gli stati $|\ell \pm \ell\rangle$ sono di minima indeterminazione.