Esame scritto di Meccanica Quantistica: soluzioni

27 gennaio 2010

L'Hamiltoniana data

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{x}|} \tag{1}$$

puó essere interpretata come qualla corrispondente ad una particella di carica e in presenza di un potenziale centrale Coulombiano e di un campo magnetico dato dal potenziale vettore $\vec{A}$.

1. L'evoluzione temporale degli operatori $\vec{x}$, $\vec{p}$ e $\vec{\pi}$ segue dalle equazioni di Heisenberg, e si ottengono facilmente dai commutatori fondamentali

$$[\pi_i, x_j] = -i\hbar\delta_{ij} \tag{2}$$
$$[\pi_i, p_j] = -i\hbar\partial_j A_i(\vec{x}) \tag{3}$$
$$[\pi_i, \pi_j] = i\hbar\left(\partial_i A_j(\vec{x}) - \partial_j A_i(\vec{x})\right) \tag{4}$$

Si ha

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \vec{x}] = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{\pi^2}{2m}, \vec{x}\right] = \frac{\vec{p}-\vec{A}}{m} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}_i}{dt} &= \frac{i}{\hbar}\left(\pi_k\left[\pi_k, p_i\right] + \left[\pi_k, p_i\right]\pi_k - \left[\frac{e^2}{|\vec{x}|}, p_i\right]\right) = \\ &= \frac{1}{2m}\sum_k\left(\pi_k\partial_i A_k + \partial_i A_k \pi_k\right) - \frac{e^2}{|\vec{x}|^2}\frac{x_i}{|\vec{x}|}\end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{d\vec{\pi}_i}{dt} = -\frac{1}{2m}\sum_k\left(\pi_k(\partial_k A_i - \partial_i A_k) + (\partial_k A_i - \partial_i A_k)\pi_k\right) - \frac{e^2}{|\vec{x}|^2}\frac{x_i}{|\vec{x}|} \tag{7}$$

2. Sia $\psi(\vec{x}) = \langle\vec{x}|\psi\rangle$ un'autofunzione dell'Hamiltoniana energia E. L'equazione di Schrödinger è

$$\mathcal{H}\psi(x) = E\psi(x) \tag{8}$$

dove l'operatore $\mathcal{H}$ è espresso nella rappresentazione delle coordinate. Moltiplicando entrambi i membri per la fase $e^{-i/\hbar\Lambda(\vec{x})}$

$$e^{-i/\hbar\Lambda(\vec{x})}\mathcal{H}e^{i/\hbar\Lambda(\vec{x})}e^{-i/\hbar\Lambda(\vec{x})}\psi(x) = Ee^{-i/\hbar\Lambda(\vec{x})}\psi(x), \tag{9}$$

osserviamo che la funzione d'onda $\psi'(x) = e^{-i/\hbar\Lambda(\vec{x})}\psi(\vec{x})$ è autofunzione dell'Hamiltoniana

$$\mathcal{H}' = e^{-i/\hbar\Lambda(\vec{x})}\mathcal{H}e^{i/\hbar\Lambda(\vec{x})} = \frac{\vec{\pi}'^2}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{x}|} \tag{10}$$

dove

$$\begin{aligned} \vec{\pi}' &= e^{-i/\hbar\Lambda(\vec{x})}\vec{\pi}e^{i/\hbar\Lambda(\vec{x})} = e^{-i/\hbar\Lambda(\vec{x})}\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \vec{A}\right)e^{i/\hbar\Lambda(\vec{x})} = \\ &= -i\hbar\vec{\nabla} - (\vec{A} - \nabla\Lambda) = \vec{p} - \vec{A}' \end{aligned} \tag{11}$$

Questo risultato mostra che lo spettro dell'Hamiltoniana rimane invariato se al potenziale vettore viene aggiunto un termine proporzionale a $\vec{\nabla}\Lambda$.

3. Il potenziale

$$\vec{A}_0(\vec{x}) = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

può essere scritto come

$$\vec{A}_0(\vec{x}) = \frac{B}{2}\vec{\nabla}(x_1x_2). \tag{13}$$

Pertanto, se ci mettiamo nel caso considerato al punto precedente e scegliamo

$$\Lambda = \frac{B}{2}x_1x_2 \tag{14}$$

il potenziale vettore si annulla, e l'hamiltoniana coincide con quella dell'atomo di idrogeno. Pertanto l'hamiltoniana data ha lo stesso spettro dell'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno, ossia

$$E_n = -\frac{e^4m}{2n^2\hbar^2}. \tag{15}$$

4. Nel caso in cui il potenziale vettore sia dato da

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

visto che siamo interessati al primo ordine perturbativo, possiamo riscrivere l'hamiltoniana trascurando termini di ordine B^2. Si ottiene

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{x}|} + \frac{B}{2m}(x_1p_2 - x_2p_1) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{x}|} + \frac{B}{2m}J_3 \tag{17}$$

da cui, scegliendo le autofunzioni dell'atomo di idrogeno come autostati di J_3 con autovalore m, si ottiene lo spettro

$$E_n = -\frac{e^4m}{2n^2\hbar^2} + \frac{B}{2m}m\hbar \tag{18}$$

5. Nello spettro ottenuto nel punto precedente eq. (4) il campo magnetico si accoppia alla terza componente del momento angolare J_3. Questo rompe la simmetria sferica dell'atomo di idrogeno e modifica la degenerazione dello spettro. Resta tuttavia una invarianza per rotazioni attorno all'asse z. In particolare, in presenza del campo magnetico sono gli stati con fisso n ed j_3 ad avere la medesima energia, poichè i valori possibili di l vanno da 0 a $n-1$, il numero di stati degeneri è pari ad $n - j_3$.