ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

1 Febbraio 2013

Traccia di soluzione

1)

Introducendo la coordinata del centro di massa e relativa

$$\vec{X} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2}\,, \qquad \vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2\,,$$

l'hamiltoniana del sistema può essere scritta come

$$H_0 = H_{cm} + H_r + H_s\,,$$

dove

$$H_{cm} = \frac{\vec{P}^{\,2}}{2M} - e\vec{E}\cdot\vec{X}\,, \quad H_r = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{x}|}\,, \quad H_s = \lambda\vec{s}_1\cdot\vec{s}_1\,,$$

con $M = m_1 + m_2$ e $m = m_1 m_2/M$ rispettivamente massa totale e massa ridotta del sistema.

Chiaramente abbiamo che $[H_s, H_{cm}] = [H_s, H_r] = [H_{cm}, H_r] = 0\,.$

2)

Le equazioni di Heisenberg per il moto del baricentro sono

$$\frac{d}{dt}\vec{X} = -\frac{i}{\hbar}[\vec{X}, H_{cm}] = -\frac{i}{\hbar}[\vec{X}, \frac{\vec{P}^{\,2}}{2M}] = \frac{\vec{P}}{M}\,;$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = -\frac{i}{\hbar}[\vec{P}, H_{cm}] = -\frac{i}{\hbar}[\vec{P}, -e\vec{E}\cdot\vec{X}] = -e\vec{E}\,;$$

dalla cui soluzione otteniamo

$$\vec{P}(t) = -e\vec{E}t + \vec{P}(0) \qquad \vec{X}(t) = -e\frac{\vec{E}t^2}{2M} + \frac{\vec{P}(0)t}{M} + \vec{X}(0)\,.$$

3)

Trascurando il moto del baricentro l'hamiltoniana del sistema è

$$H_r + H_s = H_r + \frac{\lambda}{2}(\vec{s}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2)\,,$$

dove $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 =$ è l'operatore di spin totale del sistema.

La funzione d'onda dello stato fondamentale è data dalla funzione d'onda dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno per la parte spaziale e dal singoletto antisimmetrico per la parte spinoriale

$$\langle \vec{x}|100; s, s_z\rangle = \psi_{100}(\vec{x})\,\chi_{0,0}$$

la cui evoluzione temporale è

$$\langle \vec{x}|100; s, s_z; t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\psi_{100}(\vec{x})\,\chi_{0,0}$$

dove

$$E_0 = -\frac{e^2}{2a_B} - \frac{3\hbar^2\lambda}{4}$$

è l'autovalore dello stato fondamentale del sistema e

$$\psi_{100}(\vec{x}) = \frac{e^{-|\vec{x}|/a_B}}{\sqrt{\pi}a_B^{3/2}} \qquad \text{con} \quad a_B = \frac{\hbar^2}{me^2}\,.$$

(è considerata corretta la soluzione anche se non vengono dati i valori di a_B e della normalizzazione).

4)

Scegliamo l'asse z diretto lungo il campo magnetico $\vec{B}$ e scriviamo gli stati nella base $|n, l, l_z\rangle|s, s_z\rangle$.

La correzione all'energia dello stato fondamentale è data da

$$\langle 100|\langle 00|\Delta H|100\rangle|00\rangle = \langle 100|\langle 00|B_z(\mu_l L_z+\mu_1 s_{1z}+\mu_2 s_{2z})|100\rangle|00\rangle = B_z\langle 00|(\mu_1 s_{1z}+\mu_2 s_{2z})|00\rangle = 0$$

dove abbiamo usato che

$$|00\rangle_{s,s_z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle_{s_1,s_{1z}}|\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle_{s_2,s_{2z}} - |\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle_{s_1,s_{1z}}|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle_{s_2,s_{2z}}\right].$$

5)

L'autovalore imperturbato dell'energia è $E_1 = -\frac{e^2}{2a_B} + \frac{\hbar^2\lambda}{4}$ con degenerazione 3. Se calcoliamo l'effetto della perturbazione sul sottospazio degenere individuato dagli autostati$|100\rangle|1s_z\rangle$ otteniamo

$$\langle 100|\langle 1s_z|\Delta H|100\rangle|1s_z\rangle = \frac{\hbar}{2}B_z(\mu_1+\mu_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{-}1 \end{pmatrix}\,,$$

che è diagonale con autovalori $\Delta E_1 = 0, \pm\hbar B_z(\mu_1+\mu_2)/2$ per cui la perturbazione rimuove completamente la degenerazione su s_z.

6)

Se lo stato di partenza è autostato dell'hamiltoniana relativa, la parte spaziale della funzione d'onda dipende dal tempo attraverso una pura fase, e quindi la probabilità di transizione è dovuta alla sola parte spinoriale dell'hamiltoniana.

In assenza di perturbazione, l'hamiltoniana H_0 è invariante per rotazioni, quindi possiamo scegliere l'asse z in modo tale che lo spin della prima particella sia su rispetto ad esso, ossia tale che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi in uno stato $|\psi, 0\rangle$ tale che

$$s_{1z}|\psi, 0\rangle = +\frac{\hbar}{2}|\psi, 0\rangle.$$

Ne segue quindi che al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato

$$|\psi, 0\rangle = |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle_{s_1,s_{1z}}|\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle_{s_2,s_{2z}}\,.$$

Osserviamo inoltre che $s_z = s_{1z}+s_{2z}$ commuta con H_0 e quindi è una costante del moto. Ne segue che non solo al tempo $t = 0$ ma a qualunque tempo t se una misura dello spin della prima particella da come risultato spin giù, la seconda particella deve avere spin su. Quindi, scrivendo lo stato al tempo t come sovrapposizione di autostati dell'hamiltoniana, vogliamo calcolare la probabilità che lo stato al tempo t sia

$$|\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle_{s_1,s_{1z}}|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle_{s_2,s_{2z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle_{s,s_z} - |00\rangle_{s,s_z})\,.$$

Otteniamo facilmente l'evoluzione temporale dello stato di partenza, scrivendolo nella base di autostati dell'hamiltoniana, su cui l'evoluzione temporale è diagonale:

$$|\psi, 0\rangle = |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle_{s_1,s_{1z}}|\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle_{s_2,s_{2z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle_{s,s_z} + |00\rangle_{s,s_z})\,.$$

Troviamo così

$$|\psi, t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_s t}|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle = \sqrt{2}e^{-\frac{i\hbar\lambda t}{4}}\left[\cos\left(\frac{\hbar\lambda t}{2}\right)|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle + i\sin\left(\frac{\hbar\lambda t}{2}\right)|\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle\right]\,,$$

e la probabilità richiesta è

$$P = \left|\langle\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}|\langle\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}|e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle\right|^2 = \sin^2\frac{\hbar\lambda t}{2}$$

Se il sistema non è in un autostato dell'hamiltoniana relativa, la funzione d'onda spaziale dipende dal tempo. Tuttavia, se la misura eseguita al tempo t è una misura di spin, la sua probabiltà si ottiene eseguendo la traccia su tutti i gradi di libertà non osservati. Poiché lo stato di posizione è uno stato puro, e la funzione d'onda è fattorizzata nel prodotto di una funzione d'onda spaziale e di una di spin (ossia non è *entangled*) tale traccia non produce alcun effetto, ed il risultato non cambia.

7)

Per poter determinare l'effetto della perturbazione in modo esatto lo stato del sistema dev'essere autostato del termine di perturbazione ΔH, ovvero lo stato dev'essere in un autostato di s_{1z} e s_{2z}. Dallo stato del sistema $|\psi, t\rangle$ ricavato nel punto precedente vediamo che ciò avviene per

$$\frac{\hbar\lambda t}{2} = n\frac{\pi}{2} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

ovvero per i tempi

$$t_n = n\frac{\pi}{\hbar\lambda} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots .$$