ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

24 gennaio 2014

Traccia di soluzione

(1) Le equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg sono:

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, a_i]\,, \qquad \frac{da_i^\dagger}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, a_i^\dagger] \tag{1}$$

da cui, utilizzando le regole di commutazione date nel testo, otteniamo

$$\frac{da_1}{dt} = -i(\omega a_1 + \lambda a_2)\,, \quad \frac{da_2}{dt} = -i(\omega a_2 + \lambda a_1)\,, \tag{2}$$

$$\frac{da_1^\dagger}{dt} = i(\omega a_1^\dagger + \lambda a_2^\dagger)\,, \quad \frac{da_2^\dagger}{dt} = i(\omega a_2^\dagger + \lambda a_1^\dagger)\,. \tag{3}$$

(2) Abbiamo che

$$\begin{cases} A_1 = \cos\theta\; a_1 - \sin\theta\; a_2 \\ A_2 = \sin\theta\; a_1 + \cos\theta\; a_2 \end{cases} \tag{4}$$

da cui, sempre utilizzando le regole di commutazione date nel testo, otteniamo

$$[A_i, A_j] = [A_i^\dagger, A_j^\dagger] = 0\ , \quad [A_i, A_j^\dagger] = M_{ia} M_{jb} [a_a, a_b^\dagger] = \delta_{ij}\ , \tag{5}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che la matrice M_{ij} è una matrice ortogonale (matrice di rotazione). L'hamiltoniana può essere scritta come

$$\begin{aligned} H &= a^\dagger \hbar \begin{pmatrix} \omega & \lambda \\ \lambda & \omega \end{pmatrix} a = A^\dagger M(\theta)\, \hbar \begin{pmatrix} \omega & \lambda \\ \lambda & \omega \end{pmatrix} M^\dagger(\theta) A = \cdots \\ &= A^\dagger\, \hbar \begin{pmatrix} \omega - 2\cos\theta\sin\theta\lambda & (1-2\sin^2\theta)\lambda \\ (1-2\sin^2\theta)\lambda & \omega + 2\cos\theta\sin\theta\lambda \end{pmatrix} A = \hbar \Big\{ (\omega - 2\cos\theta\sin\theta\lambda)\, A_1^\dagger A_1 \\ &\quad + (\omega + 2\cos\theta\sin\theta\lambda)\, A_2^\dagger A_2 + (1-2\sin^2\theta)\lambda\, (A_1^\dagger A_2 + A_2^\dagger A_1) \Big\} \end{aligned} \tag{6}$$

(3) L'hamiltoniana imperturbata è

$$H^{(0)} = \hbar\omega \left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 \right) \tag{7}$$

che a meno di una costante additiva è l'hamiltoniana di un sistema di due oscillatori armonici unidimensionali aventi la stessa frequenza (o, equivalentemente, di un oscillatore armonico bidimensionale isotropo), espressa in termini di operatori di creazione e distruzione. Lo spettro è quindi dato da

$$E^{(0)}_{n_1+n_2} = \hbar\omega(n_1 + n_2)\,, \tag{8}$$

con autovettori $|n_1, n_2\rangle$. Il primo stato eccitato ha autovalore $E_1^{(0)} = \hbar\omega$, degenere 2 volte, con autostati $|1, 0\rangle$ e $|0, 1\rangle$. La correzione al primo ordine data dalla perturbazione

$$V = \hbar\lambda \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 \right) \tag{9}$$

si ottiene diagonalizzando la matrice

$$(\langle 1, 0|, \langle 0, 1|)\, \hbar\lambda \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 \right) \begin{pmatrix} |1, 0\rangle \\ |0, 1\rangle \end{pmatrix} = \hbar\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \tag{10}$$

da cui $\Delta E_1^{(1)} = \pm\hbar\lambda$. La perturbazione rimuove quindi la degenerazione.

(4) Il secondo stato eccitato ha autovalore $E_2^{(0)} = 2\hbar\omega$, degenere 3 volte, con autostati $|2, 0\rangle$, $|1, 1\rangle$ e $|0, 2\rangle$. La correzione al primo ordine si ottiene diagonalizzando la matrice

$$(\langle 2, 0|, \langle 1, 1|, \langle 0, 2|)\, \hbar\lambda \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 \right) \begin{pmatrix} |2, 0\rangle \\ |1, 1\rangle \\ |0, 2\rangle \end{pmatrix} = \sqrt{2}\hbar\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \tag{11}$$

da cui $\Delta E_2^{(1)} = 0, \pm 2\hbar\lambda$. La perturbazione rimuove quindi la degenerazione. La nuova base che diagonalizza la perturbazione è data da

$$|-\rangle = (|2, 0\rangle - \sqrt{2}|1, 1\rangle + |0, 2\rangle)/2, \tag{12}$$

$$|0\rangle = (|2, 0\rangle - |0, 2\rangle)/\sqrt{2}, \tag{13}$$

$$|+\rangle = (|2, 0\rangle + \sqrt{2}|1, 1\rangle + |0, 2\rangle)/2. \tag{14}$$

La correzione al secondo ordine a questi stati è nulla, come si può vedere immediatamente osservando che

$$\langle n_1, n_2|V|+\rangle = \langle n_1, n_2|V|-\rangle = \langle n_1, n_2|V|0\rangle = 0\,, \tag{15}$$

dove $\langle n_1, n_2|$ è un qualsiasi stato che non appartenga al sottospazio generato dagli stati $|0\rangle$, $|+\rangle$, $|-\rangle$.

(5) Per $\theta = \pi/4$ l'hamiltoniana scritta in termini di A_i e $A_i^\dagger$ si disaccoppia:

$$H = \hbar(\omega - \lambda)\, A_1^\dagger A_1 + \hbar(\omega + \lambda)\, A_2^\dagger A_2, \tag{16}$$

che è l'hamiltoniana di un sistema di due oscillatori armonici con frequenze $\omega \pm \lambda$. Lo spettro esatto è quindi

$$E_{N_1,N_2} = \hbar\omega(N_1 + N_2) + \hbar\lambda(N_2 - N_1) \tag{17}$$

Gli autovalori esatti corrispondenti al punto precedente sono $E_{0,2} = 2\hbar(\omega - \lambda)$, $E_{1,1} = 2\hbar\omega$, $E_{2,0} = 2\hbar(\omega + \lambda)$. Si vede cosìche il risultato perturbativo al primo ordine è esatto, e quindi il fatto che la perturbazione al secondo ordine si annulli non è accidentale. Nel caso $\omega = \lambda$ l'hamiltoniana diventa

$$H = 2\hbar\omega\, A_2^\dagger A_2,$$

ovvero l'hamiltoniana di un singolo oscillatore.

(6) Per risolvere le equazioni del moto è conveniente partire dall'hamiltoniana disaccoppiata del punto precedente

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, A_1] = -i(\omega - \lambda)A_1\,, \quad \frac{dA_2}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, A_2] = -i(\omega + \lambda)A_2 a_1)\,, \tag{18}$$

da cui

$$A_1(t) = e^{-i(\omega-\lambda)t}A_1(0)\,, \quad A_2(t) = e^{-i(\omega+\lambda)t}A_2(0)\,, \tag{19}$$

e riesprimendo in termini di a_i e $a_i^\dagger$

$$a(t) = M^\dagger(\pi/4)\, A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} A_1(t) + A_2(t) \\ -A_1(t) + A_2(t) \end{pmatrix}\,. \tag{20}$$

Nel caso $\omega = \lambda$ il contributo relativo al primo oscillatore sparisce dall'hamiltoniana e l'evoluzione temporale diventa

$$A_1(t) = A_1(0)\,, \quad A_2(t) = e^{-2i\omega t}A_2(0)\,. \tag{21}$$

(7) Conviene considerare il caso di una trasformazione infinitesima, per cui, sviluppando al primo ordine in θ l'Eq.(9) abbiamo che

$$A_i = (1 - i\,\theta J^\dagger)\, a_i\, (1 + i\,\theta J) = a_i + i\,\theta[a_i, J]\,, \tag{22}$$

mentre dalle Eq. (7-8) troviamo

$$A_i = M_{ij}(\theta)\, a_j = a_i + i\,\theta\, \sigma^{(2)}_{ij} a_j\,, \tag{23}$$

da cui

$$[a_1, J] = -i\, a_2 \qquad [a_2, J] = i\, a_1\,. \tag{24}$$

Dal fatto che J non commuta con a_1 e con a_2 si evince che deve dipendere da $a_1^\dagger$ e $a_2^\dagger$, scriviamo pertanto

$$J = -ic_1 a_1^\dagger + ic_2 a_2^\dagger \tag{25}$$

che inserita nelle relazioni di commutazione precedenti permette di ricavare $c_1 = a_2$ e $c_2 = a_1$. Pertanto otteniamo

$$J = -ia_1^\dagger a_2 + ia_2^\dagger a_1 = a_i^\dagger \sigma^{(2)}_{ij} a_j\,. \tag{26}$$

Equivalentemente, il problema si può risolvere ricordando che gli operatori di creazione e distruzione possono essere scritti come combinazione lineare degli operatori posizione ed impulso, ed osservando che la trasformazione Eq. (7) è una rotazione di angolo θ nel piano dei due oscillatori. L'operatore J è pertanto il generatore delle rotazioni nel piano, la cui forma in termini di operatori di creazione e distruzione si può determinare esprimendo gli operatori posizione ed impulso in termini di essi, ed è appunto dato dalla Eq. (26).