ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

27 Gennaio 2015

Traccia di soluzione

(1) Definendo la coordinata del baricentro e relativa (con i rispettivi impulsi coniugati)

$$\vec{R} = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2)/2\,, \qquad \vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2\,, \qquad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2\,, \qquad \vec{p} = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)/2\,, \tag{1}$$

l'hamiltoniana si separa in $H_0 = H_R + H_r$, dove

$$H_R = \frac{\vec{P}^2}{4m} - (q_1 + q_2)\vec{E}\cdot\vec{R}\,, \quad H_r = \frac{\vec{p}^2}{m} + \frac{m\omega^2}{2}\vec{r}^2 - (q_1 - q_2)\vec{E}\cdot\frac{\vec{r}}{2}\,. \tag{2}$$

Dalle regole di commutazione fra $\vec{R}$, $\vec{r}$, $\vec{P}$ e $\vec{p}$ si ricava facilmente che

$$[H_R, H_r] = 0\,. \tag{3}$$

(2) Visto che le hamiltoniane H_R ed H_r commutano, le equazioni del moto alla Heisenberg per posizioni ed impulsi si disaccoppiano scegliendo le variabili baricentrali e relative:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\vec{R}, H] = \frac{\vec{P}}{2m} \tag{4}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\vec{r}, H] = \frac{2\vec{p}}{m} \tag{5}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\vec{P}, H] = (q_1 + q_2)\vec{E} \tag{6}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\vec{p}, H] = -m\omega^2\vec{r} + \frac{1}{2}(q_1 - q_2)\vec{E}. \tag{7}$$

Abbiamo inoltre

$$\vec{D} = (q_1 + q_2)\vec{R} + \frac{1}{2}(q_1 - q_2)\vec{r}, \tag{8}$$

da cui

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\vec{D}, H] = -\frac{i}{\hbar}\left((q_1 + q_2)[\vec{R}, H_R] + \frac{q_1 - q_2}{2}[\vec{r}, H_r]\right) = \left(\frac{q_1 + q_2}{2m}\vec{P} + \frac{q_1 - q_2}{m}\vec{p}\right)\,. \tag{9}$$

(3) Con $q \equiv q_1 = q_2$ la Eq. (6) diventa

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 2q\vec{E}, \tag{10}$$

da cui, sostituendo e risolvendo l'equazione del moto per $\vec{R}$.

$$\langle \vec{D}(t) \rangle = 2q \langle \vec{R}(t) \rangle = \langle \vec{D}(0) \rangle + \frac{q}{m} \langle \vec{P}(0) \rangle t + \frac{q^2}{m} \vec{E} t^2 \,. \tag{11}$$

Il valor medio ad ogni tempo t è determinato dati i valori medi di posizione ed impulso, oppure di posizione e momento di dipolo al tempo iniziale.

(4) L'hamiltoniana del sistema è ora $H = \frac{\vec{p}^2}{m} + \frac{m\omega^2}{2} \vec{r}^2 + H_B$. In coordinate sferiche e nella base di autostati degli operatori $\vec{J}^2$, J_z, $\vec{L}^2$ e $\vec{s}^2$ (dove $\vec{J} = \vec{L} + \vec{s}$) abbiamo che

$$H = \frac{\vec{p}^2}{m} + \frac{m\omega^2}{2} \vec{r}^2 - \frac{B}{2} \left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{s}^2 \right) , \tag{12}$$

con spettro di autovalori (ponendo $N = 2n + l$, dove l è il numero quantico orbitale e n è un intero non negativo)

$$E_{n,j,l,s} = \hbar \sqrt{2} \omega \left(N + \frac{3}{2} \right) - \frac{\hbar^2 B}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right) , \tag{13}$$

dove n, l possono assumere tutti i valori interi non negativi, $s = 0, 1$ e $|l - s| \leq j \leq l + s$.

Nel caso in cui le particelle sono in uno stato di singoletto ($s = 0$) la degenerazione è quella dell'oscillatore armonico tridimensionale isotropo $d = (N + 1)(N + 2)/2$. Nel caso in cui le particelle sono in uno stato di tripletto ($s = 1$) se $j = l$ la degenerazione è ancora $d = (N + 1)(N + 2)/2$, negli altri casi ($s = 1$ e $j = l + 1$ o $j = l - 1$) l'unica degenerazione è rispetto a j_z da cui l'hamiltoniana non dipende, pertanto $d = 2j + 1$.

(5) Ponendo l'asse z lungo la direzione di $\vec{E}$ abbiamo che il termine di perturbazione è

$$\Delta H = -(q_1 - q_2) |\vec{E}| \frac{z}{2} \,. \tag{14}$$

Convinene scrivere autofunzioni ed autovalori nella base cartesiana. In questa base, le autofunzioni hanno la forma $|n_x n_y n_z\rangle$, e l'autovalore imperturbato dello stato fondamentale è dato da

$$E_0 = E^{(0)}_{n_x} + E^{(0)}_{n_z} + E^{(0)}_{n_z}, \quad \text{dove} \;\; E^{(0)}_{n_i} = \hbar \sqrt{2} \omega \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \,. \tag{15}$$

La perturbazione agisce soltanto lungo la componente z e inoltre, ponendo per brevità $|0\rangle \equiv |000\rangle$,

$$\langle 0 | \Delta H | 0 \rangle = 0 \,, \tag{16}$$

visto che $z = \sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{2} m\omega}} (a + a^\dagger)$, pertanto al prim'ordine la correzione dell'autovalore dell'energia è nulla $\Delta E^{(1)} = 0$ e la degenerazione non cambia.

Al second'ordine, ponendo $|1\rangle \equiv |001\rangle$,

$$\Delta E^{(2)} = \sum_{k \neq 0} \frac{|\langle k | \Delta H | 0 \rangle|^2}{E_0 - E_k} = (q_1 - q_2)^2 \frac{|\vec{E}|^2}{4} \left(\frac{|\langle 1 | z | 0 \rangle|^2}{E_0 - E_1} \right) = \tag{17}$$

$$= -(q_1 - q_2)^2 \frac{|\vec{E}|^2}{4} \frac{\hbar}{m \sqrt{2} \omega} \frac{1}{\hbar \sqrt{2} \omega} = -(q_1 - q_2)^2 \frac{|\vec{E}|^2}{8 m \omega^2} \,. \tag{18}$$

D'altra parte, l'hamiltoniana può essere riscritta come

$$H = \frac{\vec{p}^2}{m} + \frac{m\omega^2}{2}\vec{r}^2 - \frac{q_1 - q_2}{2}\vec{E}\cdot\vec{r} = \frac{\vec{p}^2}{m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\vec{r} + \kappa\vec{E}\right)^2 + K\,, \tag{19}$$

dove $\kappa = -(q_1 - q_2)/(2m\omega^2)$ e $K = -m\omega^2\kappa^2|\vec{E}|^2/2$, pertanto lo spettro dell'energia è

$$E = \hbar\sqrt{2}\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) + K\,, \tag{20}$$

che coincide con il risultato perturbativo.

(6) Nel caso di particelle identiche $q_1 = q_2 = q$, l'hamiltoniana è data da

$$H = \frac{\vec{p}^2}{m} + \frac{m\omega^2}{2}\vec{r}^2\,, \tag{21}$$

con spettro

$$E = \hbar\sqrt{2}\omega\left(N + \frac{3}{2}\right)\,. \tag{22}$$

Ricordiamo che la parità delle autofunzioni dell'oscillatore armonico tridimensionale isotropo è $(-1)^l$, quindi, visto che $N = 2n + l$, la parità dell'N-esimo autostato è uguale a quella di l (se l è pari, N è pari e lo stato è pari).

Se $N = 2n + l$ è pari, la funzione d'onda spaziale è simmetrica quindi la parte spinoriale dev'essere antisimmetrica (singoletto $s = 0$). La degenerazione è $d = (N + 1)(N + 2)/2$.

Se invece $N = 2n + l$ è dispari, la funzione d'onda spaziale è antisimmetrica quindi la parte spinoriale dev'essere simmetrica (tripletto $s = 1$). La degenerazione è $d = 3(N + 1)(N + 2)/2$.

(7) L'equazione di Schrödinger nel sistema non rotante è

$$\frac{d|\psi, t\rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar}H|\psi, t\rangle.$$

Senza perdere in generalità fissiamo l'asse di rotazione lungo l'asse z. Lo stato del sistema al tempo t nel sistema rotante R è dato da

$$|\psi, t\rangle_R = e^{-\frac{i}{\hbar}L_z\omega t}|\psi, t\rangle$$

e soddisfa l'equazione di Schrödinger nel sistema rotante

$$\frac{d|\psi, t\rangle_R}{dt} = -\frac{i}{\hbar}H_R|\psi, t\rangle_R.$$

da cui si ottiene

$$-\frac{i}{\hbar}L_z\omega|\psi, t\rangle_R + e^{-\frac{i}{\hbar}L_z\omega t}\left(-\frac{i}{\hbar}H|\psi, t\rangle\right) = -\frac{i}{\hbar}H_R|\psi, t\rangle_R,$$

e quindi l'hamiltoniana nel sistema rotante è

$$H_R = H + L_z\omega\,,$$

con spettro

$$E_R = \hbar\sqrt{2}\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) + \hbar l_z\omega\,. \tag{23}$$

Pertanto la degenerazione su l_z è rimossa. Se $N = 2n + l$ è pari, la degenerazione è $d = N/2 + 1$ se invece $N = 2n + l$ è dispari, la degenerazione è $d = 3(N + 1)/2$.