

ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

29 gennaio 2018

Traccia di soluzione

(1) Considerando le coordinate del centro di massa e relative

$$X_0 = \frac{Mx_0 + m \sum_{i=1}^n x_i}{M + n m} \quad (1)$$

$$X_i = x_0 - x_i \quad (i > 1), \quad (2)$$

con i rispettivi impulsi coniugati P_0 e P_i la hamiltoniana, trascurando termini proporzionali a $\frac{m}{M}$, si separa in

$$H_0 = H_{CM} + \sum_{i=1}^n H_i, \quad (3)$$

dove

$$H_{CM} = \frac{P_0^2}{2M_T}, \quad H_i = \frac{P_i^2}{2\mu} + V(X_i, 0), \quad (4)$$

con $M_T = M + n m$ e $\mu = M m / (nM + m)$ e

$$[H_{CM}, H_i] = [H_i, H_j] = 0. \quad (5)$$

Il problema si separa quindi in n buche di potenziale unidimensionali corrispondenti al moto relativo, ed una particella libera corrispondente al moto del baricentro.

(2) Risolvendo il problema di n buche infinite unidimensionali l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale sono

$$E_0 = n \frac{\hbar^2 \pi^2}{8L^2 \mu}, \quad g = 1. \quad (6)$$

Lo stato fondamentale non è degenero perchè le n buche sono tutte nello stato fondamentale, mentre il baricentro è fermo (energia cinetica nulla).

Il primo stato eccitato è

$$E_1 = (n - 1) \frac{\hbar^2 \pi^2}{8L^2 \mu} + \frac{4\hbar^2 \pi^2}{8L^2 \mu}, \quad g = n. \quad (7)$$

La degenerazione è n perchè una qualunque delle n buche può essere posta nel primo stato eccitato.

(3) Abbiamo che

$$V(X_i, 0) = \lim_{V_0 \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n V_0 (\theta(X_i - L) + \theta(-X_i - L)). \quad (8)$$

Le equazioni del moto alla Heisenberg sono:

$$\dot{X}_0 = -\frac{i}{\hbar}[X_0, H_{CM}] = 2P_0, \quad (9)$$

$$\dot{P}_0 = -\frac{i}{\hbar}[P_0, H_{CM}] = 0, \quad (10)$$

$$\dot{X}_i = -\frac{i}{\hbar}[X_i, H_i] = 2P_i, \quad (11)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{i}{\hbar}[P_i, H_i] = -\lim_{V_0 \rightarrow \infty} V_0 (\delta(X_i - L) - \delta(-X_i - L)). \quad (12)$$

(4) Si veda la Sezione 14.1.2 del testo.

(5) L'energia e la degenerazione dello stato fondamentale sono

$$E_0^{\text{id}} = \sum_{i=1}^{n/2} \frac{2i^2 \hbar^2 \pi^2}{8L^2 \mu}, \quad g = 1 : \quad (13)$$

affinché la funzione d'onda possa essere completamente antisimmetrica, al massimo due buche possono essere nello stesso livello (in due diversi stati di spin), quindi l'energia è la somma di quella dei primi $\frac{n}{2}$ livelli. Lo stato non è degenere per l'argomento dato alla domanda precedente: la degenerazione di scambio è rimossa dall'antisimmetrizzazione.

Il primo stato eccitato si ottiene mettendo l'ultima buca nel primo livello di energia superiore:

$$E_1^{\text{id}} = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{2i^2 \hbar^2 \pi^2}{8L^2 \mu} + \frac{(\frac{n}{2})^2 \hbar^2 \pi^2}{8L^2 \mu} + \frac{(\frac{n}{2} + 1)^2 \hbar^2 \pi^2}{8L^2 \mu}, \quad g = 2. \quad (14)$$

Per calcolare la degenerazione, notiamo che una combinazione completamente antisimmetrica di stati aventi tutti numeri quantici diversi è non-degenere. In questo caso, i primi $n-2$ stati hanno tutti numeri quantici diversi, corrispondenti ai primi $\frac{n}{2}$ livelli energetici, ciascuno con due possibili valori per lo spin. I restanti due stati si trovano nell' $\frac{n}{2} + 1$ -esimo e nell' $\frac{n}{2} + 2$ -esimo livello energetico rispettivamente. Ma ciascuno di essi può avere due diversi valori per lo spin, quindi il livello è quattro volte degenere.

(6) Sia $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$, abbiamo che

$$H_0 = -\frac{\lambda}{2} \left(\vec{s}^2 - \frac{9}{4} \right). \quad (15)$$

Lo stato fondamentale è quindi quello di spin massimo $s = \frac{3}{2}$, con quattro possibili valori della sua terza componente, da cui l'energia non dipende. Energia e degenerazione dello stato fondamentale della hamiltoniana di spin sono quindi

$$E_0^s = -\frac{3\lambda}{4}, \quad g^s = 4. \quad (16)$$

Le funzioni d'onda sono date da

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle &= \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \right) \\ \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle + \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle + \left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \right) \\ \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle &= \left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

(7) Lo stato si trova nello stato di spin massimo della domanda precedente, e quindi la funzione d'onda di spin è quella data in questa domanda (quattro volte degenerare rispetto al vaore della terza componente dello spin totale). Visto che la funzione d'onda di spin è completamente simmetrica la funzione d'onda spaziale deve essere completamente antisimmetrica, ed è quindi data ta

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \psi_i(x_1)\psi_j(x_2)\psi_k(x_3), \quad (18)$$

dove $\psi_i(x_j)$ è l'autofunzione corrispondente all i -esimo livello per la j -esima buca di potenziale (essendo $i=1$ lo stato fondamentale). L'energia è data da

$$E_0^{\text{tot}} = \sum_{n=1}^3 \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{8L^2 \mu} + E_0^s = \frac{7\hbar^2 \pi^2}{4L^2 \mu} + E_0^s, \quad (19)$$

dove E_0^s è l'energia dello stato fondamentale dell'hamiltoiana di spin Eq. (16).

(8) Senza perdere generalità consideriamo l'orientazione degli assi tale che $\vec{B} = B\hat{z}$. Il termine H' rimuove completamente la degenerazione dello stato fondamentale. I nuovi valori dell'energia sono

$$E_0^{\pm\frac{1}{2}} = -\frac{3\lambda}{4} \pm \frac{B}{2}, \quad E_0^{\pm\frac{3}{2}} = -\frac{3\lambda}{4} \pm \frac{3B}{2}, \quad (20)$$

dove l'indice in alto indica il valore della terza componente dello spin totale. L'effetto della perturbazione al prim'ordine sugli stati Eq. (17) è dato da

$$\epsilon B \langle \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | (s_{1z} + s_{2z}) | \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = \epsilon B, \quad (21)$$

$$\epsilon B \langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | (s_{1z} + s_{2z}) | \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = \epsilon B / \sqrt{3}, \quad (22)$$

$$\epsilon B \langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | (s_{1z} + s_{2z}) | \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = -\epsilon B / \sqrt{3}, \quad (23)$$

$$\epsilon B \langle \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | (s_{1z} + s_{2z}) | \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = -\epsilon B. \quad (24)$$

$$(25)$$