Esame scritto di Meccanica Quantistica
Traccia di soluzione

28 gennaio 2019

1. Possiamo facilmente notare come un passaggio alle coordinate baricentrali

$$\begin{cases} \vec{R} = \dfrac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2} \\ \vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \end{cases} \tag{1}$$

con impulsi rispettivi dati da

$$\begin{cases} \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ \vec{p} = \dfrac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2} \end{cases} \tag{2}$$

e

$$\begin{cases} \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_R + \vec{L}_r \\ \vec{L}_R = \vec{R} \times \vec{P} \\ \vec{L}_r = \vec{r} \times \vec{p} \end{cases} \tag{3}$$

separi l'Hamiltoniana in

$$H = H_R + H_r \tag{4}$$

$$H_R = \frac{\vec{P}^2}{4m} - \vec{E} \cdot \vec{R}(q_1 + q_2) + \frac{\mu}{\hbar}\vec{L}_R \cdot \vec{S} \tag{5}$$

$$H_r = \frac{\vec{p}^2}{m} + \frac{m\omega^2}{2}\vec{r}^2 - \vec{E}\vec{r}(\frac{q_1 - q_2}{2}) + \frac{\mu}{\hbar}\vec{L}_r \cdot \vec{S}. \tag{6}$$

È facile controllare che

$$[R, P] = [r, p] = i\hbar \tag{7}$$

$$[R, p] = [r, P] = [L_r, P] = [L_R, r] = [L_r, L_R] = ... = 0 \tag{8}$$

$$\Rightarrow [H_R, H_r] = 0 \tag{9}$$

La hamiltoniana baricentrale è di particella libera, più un termine di accoppiamento spin-orbita, e quella relativa è di oscillatore armonico, pure con un termine di accoppiamento spin-orbita. La pulsazione dell'oscillatore armonico è data da

$$\omega_r = \sqrt{2}\omega \tag{10}$$

come si vede riscrivendo H_r in termini della massa ridotta

$$m_r = \frac{m}{2} : \tag{11}$$

in termini di cui a hamiltoniana relativa è

$$H_r|_{q_1=q_2} = \frac{\vec{p}^2}{2m_r} + \frac{m_r\omega_r^2}{2}\vec{r} + \frac{\mu}{\hbar}\vec{L}_r \cdot \vec{S}. \tag{12}$$

2. Lo spettro di un oscillatore armonico isotropo di pulsazione ω_r è

$$E_{nl} = \hbar\omega_r(2n + l + 3/2), \tag{13}$$

avendo scelto la base in cui è diagonale il momento angolare relativo L_r con autovalori $\hbar^2 l(l+1)$. Lo spettro della hamiltoniana di spin

$$H_s = \frac{\mu}{\hbar}\vec{L}_r \cdot \vec{S} = \frac{\mu}{\hbar}\left(J^2 - L_r^2 - S^2\right) \tag{14}$$

è

$$E_s = \hbar\mu\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right). \tag{15}$$

La spaziatura dei livelli della hamiltoniana spaziale è proporzionale a $\hbar\omega$ e quella della hamiltoniana di spin a $\hbar\mu$, quindi se Se $\omega \gg \mu$, lo stato fondamentale è quello con in cui l'energia è minima per la parte spaziale, ossia $l = n = 0$. Suppondendo le particelle identiche, la funzione d'onda totale deve essere antisimmetrica. La simmetria sotto scambio dellle due particelle coincide con la parità degli autostati della hamiltoniana relativa. Ma la parità di un autostato di oscillatore armonico nella base in cui è diagonale il momento angolare totale è $(-1)^l$=1. Pertanto lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico relativo è simmetrico sotto scambio delle due particelle e la funzione d'onda di spin di conseguenza deve essere antisimmetrica.

I possibili stati di spin totale sono $S = 1 \Rightarrow |1,1\rangle\, |1,0\rangle\, |1,-1\rangle$ - tripletto $S = 0 \Rightarrow |0,0\rangle$ - singoletto. L'unico stato di spin totale permesso è dunque il singoletto, dispari, che è autostato della hamiltoniana di spin con autovalore nullo. L'energia dello stato fondamentale è dunque

$$E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega_r. \tag{16}$$

Se le particelle fossero state non identiche il sistema avrebbe potuto trovarsi sia in un singoletto che in un tripletto di spin. Tuttavia, in uno stato con $l = 0$, $j = s$ e quindi $E_s = 0$ dalla Eq. (15). Dunque l'energia dello stato fondamentale sarebbe rimasta la stessa.

3. Si veda la sezione 10.5.2 del testo, in particolare le Eq. (10.217-10.218).

4. Quando $\mu = 0$ la hamiltoniana di spin si annulla. Possiamo quindi scrivere l'Hamiltoniana come

$$H_r = \frac{\vec{p}^2}{2m_r} + \frac{m_r\omega_r^2}{2}(\vec{r} + \frac{\vec{E}\Delta q/2}{m_r\omega_r^2})^2 - \frac{\vec{E}^2(\Delta q/2)^2}{2m_r\omega_r^2}. \tag{17}$$

Lo spettro è quindi quello dell'oscillatore armonico isotropo, a meno di una costante additiva:

$$E_N = \hbar\omega_r(N + 3/2) - \frac{\vec{E}^2(\Delta q/2)^2}{2m_r\omega_r^2}. \tag{18}$$

dove $\Delta q = q_2 - q_1$.

La degenerazione è quella consueta dell'oscillatore armonico isotropo. Vi sono inoltre quattro possibili stati di spin tutti degeneri visto che la hamiltoniana di spin si annulla e la degenerazione totale è

$$d = 2(N + 1)(N + 2). \tag{19}$$

Ponendo $\vec{r'} = \vec{r} + \vec{d}$; $\vec{p'} = \vec{p}$, dove $\vec{d} = \dfrac{\vec{E}\Delta q/2}{m_r\omega_r^2}$ si trovano subito i valori medi di posizione ed impulso osservando che in un autostato della hamiltoniana

$$\langle n|\,\vec{r'}\,|n\rangle = \langle n|\,\vec{p}\,|n\rangle = 0, \tag{20}$$

e quindi

$$< \vec{r} >= -\vec{d}; \quad < p >= 0. \tag{21}$$

5. Al primo ordine

$$\Delta E_1 = \vec{E}(\frac{q_1 - q_2}{2})\,\langle 0|\,\vec{r}\,|0\rangle = 0 \tag{22}$$

per via della parità.

La correzione al secondo ordine è data da

$$\Delta E_2 = \sum_{k\neq n} \frac{|\,\langle k|\,V\,|0\rangle\,|^2}{E_0 - E_k}. \tag{23}$$

Si può calcolare facilmente scegliendo $\vec{E}$ lungo l'asse x e esprimendo $x = \sqrt{\dfrac{\hbar}{2m_r\omega_r}}(a + a^\dagger)$.

Si trova facilmente

$$\Delta E_2 = (\Delta q/2)^2|\vec{E}|^2\left(\frac{|\,\langle 1|\,x\,|0\rangle\,|^2}{E_0 - E_k}\right) \tag{24}$$

$$= (\Delta q/2)^2|\vec{E}|^2\left(\frac{|\,\langle 1|\,x\,|0\rangle\,|^2}{E_0 - E_k}\right) \tag{25}$$

$$= -(\Delta q/2)^2|\vec{E}|^2\frac{\hbar}{2m_r\omega_r}\frac{1}{\hbar\omega_r} = -\frac{\vec{E}^2(\Delta q/2)^2}{2m_r\omega_r^2}, \tag{26}$$

che coincide con il risultato esatto.

6. Prendendo di nuovo il vettore $\vec{E}$ lungo l'asse x e ponendo

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{m_r 2\omega_r}}(a + a^\dagger) \tag{27}$$

il potenziale prende la forma

$$V(t) = E(t)\frac{\Delta q}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m_r\omega_r}}(a + a^\dagger). \tag{28}$$

La probabilità di transizione è quindi data da

$$P_{0\to n} = \mid \frac{-i}{h}\int e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_0)t} \langle n00|\, (\sqrt{\frac{\hbar}{2m_r\omega_r}}(a + a^\dagger)\frac{\Delta q}{2}Ee^{-t/\tau})\, |000\rangle\, dt \mid^2, \tag{29}$$

dove abbiamo scelto la base cartesiana per l'oscillatore armonico isotropo in cui gli autostati di energia sono numerati da tre numeri quantici $|n_x n_y n_z\rangle$, visto che la perturbazione agisce solo sull'oscillatore lungo l'asse x n_y ed n_z non possono cambiare.

L'unica transizione possibile è $|000\rangle \to |100\rangle$, e la sua probabilità è

$$P_{0\to 1} = \left|\frac{-i}{h}\int e^{i\omega_r t}\langle 1|\, (\sqrt{\frac{\hbar}{2m_r\omega_r}}a^\dagger\frac{\Delta q}{2}Ee^{-t/\tau})\, |0\rangle\, dt\right|^2 \tag{30}$$

$$= \left(\frac{\Delta q}{2}E\sqrt{\frac{\hbar}{2m_r\omega_r}}\right)^2 \left|\frac{-i}{h}\int e^{i\omega_r t}e^{-t/\tau}dt\right|^2 \tag{31}$$

$$= \left(\frac{\Delta q}{2}E\sqrt{\frac{\hbar}{2m_r\omega_r}}\right)^2 \left|\frac{-i}{h}\left(\frac{\tau(1 + i\omega_r\tau)}{1 + \omega_r^2\tau^2}\right)\right|^2 \tag{32}$$

$$= \frac{((\Delta q/2)E\tau)^2}{2m_r\hbar\omega_r}\frac{1}{1 + \omega_r^2\tau^2} \tag{33}$$

7. Le equazioni del moto alla Heisenberg sono

$$\frac{d}{dt}a_i = \frac{i}{\hbar}[H_r, a_]} \tag{34}$$

con

$$a_i = \sqrt{\frac{m_r\omega_r}{2\hbar}}(x_i + ip_i). \tag{35}$$

Ponendo sempre $\vec{E}$ lungo x troviamo per l'operatore di creazione relativo all'asse x,

$$\frac{d}{dt}a = -i\omega_r a + \sqrt{\frac{\hbar}{2m_r\omega_r}}\frac{(\Delta q/2)E(t)}{\hbar} \tag{36}$$

mentre per gli operatori di creazione lungo gli altri assi manca il termine proporzionale ad E.

Risolvendo

$$a(t) = e^{-i\omega_r t}\left(a + \sqrt{\frac{\hbar}{2m_r\omega_r}}\frac{(\Delta q/2)}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} E(t')e^{i\omega_r t}dt'\right) \tag{37}$$

$$= e^{-i\omega_r t}\left(a + \sqrt{\frac{\hbar}{2m_r\omega_r}}\frac{(\Delta q/2)E}{\hbar}\left.\frac{\tau(1+i\omega_r\tau)}{1+\omega_r^2\tau^2}\right|_{-\infty}^{t}\right) \tag{38}$$

La probabilità di transizione è quindi data da

$$P_{1\to 0} = |\langle 0|\, a(\infty)\,|0\rangle|^2 = \frac{((\Delta q/2)E\tau)^2}{2m_r\hbar\omega_r}\frac{1}{1+\omega_r^2\tau^2}. \tag{39}$$

Quindi il risultato esatto e quello perturbativo coincidono.