

ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

22 gennaio 2020

Traccia di soluzione

(1) L'hamiltoniana si riduce a quella di due oscillatori armonici unidimensionali con pulsazione $\omega' = \sqrt{2}\omega$. Lo spettro sarà pertanto dato da

$$E^{(n)} = \hbar\omega'(n+1) = \hbar\omega'(n_1 + n_2 + 1),$$

con degenerazione $g = n + 1$.

(2) La funzione d'onda è data da

$$\Psi_0(x_1, x_2) = \psi_0(x_1) \psi_0(x_2),$$

dove

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega'}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega'x^2}{2\hbar}\right).$$

(3) Tramite la traslazione delle coordinate $x'_1 = x_1 + \alpha_1$, $x'_2 = x_2 + \alpha_2$ è possibile scrivere l'hamiltoniana come

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega'^2(x_1'^2 + x_2'^2) - \frac{m}{2}\omega'^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$$

dove $\alpha_{1,2} = \frac{eE_{1,2}}{m\omega'^2}$. Per cui lo spettro sarà

$$E^{(n)} = \hbar\omega'(n+1) - \frac{e^2}{2m\omega'^2}(E_1^2 + E_2^2),$$

con degenerazione ancora data da $g = n + 1$.

(4) Si veda ad esempio il libro di testo (Sez. 10.1.2).

(5) Nel caso di bosoni la parte spaziale della funzione d'onda dev'essere simmetrica. Lo stato fondamentale è non degenero con energia $E^{(0)} = \hbar\omega'$ e funzione d'onda spaziale

$$\Psi_{00}^+(x_1, x_2) = \psi_0(x_1) \psi_0(x_2).$$

Il primo stato eccitato è non degenero con energia $E^{(1)} = 2\hbar\omega'$ e funzione d'onda spaziale

$$\Psi_{10}^+(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(x_1) \psi_0(x_2) + \psi_0(x_1) \psi_1(x_2)).$$

Il secondo stato eccitato ha degenerazione 2 ed energia $E^{(2)} = 3\hbar\omega'$ e la funzione d'onda spaziale è la più generale combinazione lineare delle seguenti funzioni d'onda

$$\Psi_{20}^+(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_2(x_1) \psi_0(x_2) + \psi_0(x_1) \psi_2(x_2)) ,$$

$$\Psi_{11}^+(x_1, x_2) = (\psi_1(x_1) \psi_1(x_2)) .$$

Nel caso di fermioni la parte spaziale della funzione d'onda dev'essere antisimmetrica. Lo stato fondamentale è non degenere con energia $E^{(1)} = 2\hbar\omega'$ e funzione d'onda spaziale

$$\Psi_{10}^-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(x_1) \psi_0(x_2) - \psi_0(x_1) \psi_1(x_2)) .$$

Il primo stato eccitato è non degenere con energia $E^{(2)} = 3\hbar\omega'$ e funzione d'onda spaziale

$$\Psi_{20}^-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_2(x_1) \psi_0(x_2) - \psi_0(x_1) \psi_2(x_2)) .$$

Il secondo stato eccitato ha degenerazione 2 ed energia $E^{(3)} = 4\hbar\omega'$ e la funzione d'onda spaziale è la più generale combinazione lineare delle funzioni d'onda

$$\Psi_{30}^-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_3(x_1) \psi_0(x_2) - \psi_0(x_1) \psi_3(x_2)) ,$$

$$\Psi_{21}^-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_2(x_1) \psi_1(x_2) - \psi_1(x_1) \psi_2(x_2))$$

(6) È possibile separare il problema tramite la trasformazione $x'_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$, $x'_2 = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$. L'hamiltoniana nelle nuove variabili è data da

$$H = \frac{p_1'^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega_1'^2 x_1'^2 + \frac{p_2'^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega_2'^2 x_2'^2$$

il cui spettro è $E^{(n_1, n_2)} = \hbar\omega_1'(n_1 + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_2'(n_2 + \frac{1}{2})$ con $\omega_{1,2}' = \sqrt{2}\omega_{1,2}$.

(7) Scrivendo la perturbazione V in termini degli operatori di creazione e distruzione di singola particella abbiamo

$$V = m(\omega_1^2 - \omega_2^2)x_1x_2 = \frac{\hbar\Omega_-^2}{2\Omega_+} (a_1 + a_1^\dagger)(a_2 + a_2^\dagger)$$

dove definiamo $\Omega_\pm = \sqrt{\omega_1^2 \pm \omega_2^2}$, avendo supposto, senza ledere la generalità, $\omega_1 > \omega_2$. Pertanto la correzione allo stato fondamentale è nulla

$$E_0 = \hbar\Omega_+$$

mentre la correzione al primo stato eccitato si ottiene diagonalizzando la matrice

$$\langle i|V|j\rangle = \frac{\hbar\Omega_-^2}{2\Omega_+} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $i, j = 1, 2$ e

$$|1\rangle = |n_1 = 1, n_2 = 0\rangle; \quad |2\rangle = |n_1 = 0, n_2 = 1\rangle,$$

i cui autovalori sono ovviamente $\lambda_{\pm} = \pm \frac{\hbar\Omega_{\pm}^2}{2\Omega_{\pm}}$. Abbiamo quindi che la perturbazione rimuove la degenerazione, ed il primo stato eccitato si separa nei due livelli

$$E_1^{\pm} = 2\hbar\Omega_{\pm} \pm \frac{\hbar\Omega_{\pm}^2}{2\Omega_{\pm}}.$$

Il risultato esatto per lo stato fondamentale in termini di Ω_{\pm} è dato da

$$E^{(0,0)} = \frac{\hbar}{2}(\sqrt{\Omega_+^2 + \Omega_-^2} + \sqrt{\Omega_+^2 - \Omega_-^2}) \simeq \hbar\Omega_+$$

mentre il primo stato eccitato

$$E^{(1,0)} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\Omega_+^2 + \Omega_-^2} + \frac{3\hbar}{2}\sqrt{\Omega_+^2 - \Omega_-^2} \simeq 2\hbar\Omega_+ - \frac{\hbar\Omega_-^2}{2\Omega_+}.$$

In entrambi i casi, visto che la perturbazione è proporzionale a $\epsilon = \frac{\Omega_-^2}{\Omega_+}$, il risultato perturbativo al primo ordine si ottiene sviluppando il risultato esatto in potenze di ϵ fino al primo ordine. Ovviamente nel caso $\omega_1 < \omega_2$ i risultati rimangono gli stessi ma con ω_1 e ω_2 scambiati.

(8) O è l'operatore che determina una rotazione di un angolo $\pi/4$ nel piano delle coordinate (x_1, x_2) . Esso è quindi dato da

$$O = e^{-i\hbar(x_1p_2 - x_2p_1)\pi/4}$$