

Traccia di soluzione dell'esame scritto di meccanica quantistica

Esame del 1 Marzo 2013

Esercizio 1. Scriviamo H usando

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, M = 2m \quad (1)$$

$$x = x_2 - x_1, \mu = \frac{m}{2} \quad (2)$$

$$P = p_1 + p_2 = M\dot{X} = m(x_1 + x_2) \quad (3)$$

$$p = \frac{p_2 - p_1}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (4)$$

ottenendo

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2}KX^2 + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\bar{K}x^2 - \frac{\lambda}{2\hbar}(\vec{s}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2), \quad (5)$$

dove

$$K = 2k + 2\alpha \quad (6)$$

$$\bar{K} = \frac{k}{2} - \frac{\alpha}{2} \quad (7)$$

e $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ è l'operatore spin totale del sistema.

Esercizio 2. Considerando la base $|N, n, s, s_z, s_1, s_2\rangle$, lo spettro di H è

$$E_{N,n,s} = \hbar\Omega \left(N + \frac{1}{2}\right) + \hbar\bar{\omega} \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\lambda\hbar}{2} \left(s(s+1) - \frac{3}{2}\right) \quad (8)$$

dove

$$\Omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 + \frac{\alpha}{k}} \quad (9)$$

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{\bar{K}}{\mu}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{k}} \quad (10)$$

Le condizioni su λ e α assicurano che la separazione tra livelli dovuta al fatto che $\Omega \neq \bar{\omega}$ e dovuta allo spin è molto minore della separazione tra livelli dovuta alla variazione di N e n . Pertanto l'unica degenerazione è data dalla componente lungo z dello spin $deg = 2s + 1$.

Esercizio 3. Scriviamo

$$H = H_0 + \alpha V \quad (11)$$

con

$$V = x_1 x_2 \quad (12)$$

e

$$H_0 = p_1^2/2m + m\omega^2 x_1^2/2 + p_2^2/2m + m\omega^2 x_2^2/2, \quad (13)$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (14)$$

Lo spettro dell'hamiltoniana imperturbata H_0 è

$$E_{n_1+n_2}^{(0)} = \hbar\omega (n_1 + n_2 + 1), \quad \text{deg} = n_1 + n_2 + 1, \quad (15)$$

e indichiamo gli autostati con $|n_1, n_2\rangle$.

- Per il livello fondamentale il contributo fino al primo ordine perturbativo è

$$E_0^{(0)} + \Delta E_0 \quad (16)$$

dove

$$E_0^{(0)} = \hbar\omega, \quad \text{deg} = 1 \quad (17)$$

$$\Delta E_0 = \langle 0, 0 | \alpha V | 0, 0 \rangle = \frac{\alpha \hbar}{2m\omega} \langle 0, 0 | (a_1 + a_1^\dagger) (a_2 + a_2^\dagger) | 0, 0 \rangle = 0 \quad (18)$$

- Per il primo livello eccitato otteniamo

$$E_1^{(0)} = 2\hbar\omega, \quad \text{deg} = 2 \quad (19)$$

per il termine di perturbazione, definiamo

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} |1, 0\rangle \\ |0, 1\rangle \end{pmatrix} \quad (20)$$

e quindi

$$\langle 1 | \alpha V | 1 \rangle = \frac{\alpha \hbar}{2m\omega} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

che ha come autovalori

$$\Delta E_1^\pm = \pm \frac{\alpha \hbar}{2m\omega}. \quad (22)$$

associati agli autovettori

$$|\pm\rangle = (|1, 0\rangle \pm |0, 1\rangle) / \sqrt{2}. \quad (23)$$

Quindi l'energia del primo livello eccitato sarà

$$E_1^{(0)} + \Delta E_1^\pm = 2\hbar\omega \pm \frac{\alpha \hbar}{2m\omega}, \quad \text{degenerazione rimossa.} \quad (24)$$

Esercizio 4. I livelli d'energia sono

$$E_{N,n} = \hbar\Omega \left(N + \frac{1}{2} \right) + \hbar\bar{\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (25)$$

ricalcoliamo i livelli d'energia dello stato fondamentale

$$E_0 = E_{0,0} = \frac{\hbar}{2}\Omega + \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} = \quad (26)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left(\omega \sqrt{1 + \frac{\alpha}{k}} + \omega \sqrt{1 - \frac{\alpha}{k}} \right) \quad (27)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{2k} + 1 - \frac{\alpha}{2k} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right) \simeq \hbar\omega \quad (28)$$

e del primo eccitato

$$E_1^+ = E_{1,0} = \frac{3}{2}\hbar\Omega + \hbar\bar{\omega} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(3 + \frac{3\alpha}{2k} + 1 - \frac{\alpha}{2k} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right) \simeq 2\hbar\omega + \frac{\alpha\hbar}{2m\omega} \quad (29)$$

$$E_1^- = E_{0,1} = \frac{\hbar}{2}\Omega + \frac{3}{2}\hbar\bar{\omega} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{2k} + 3 - \frac{3\alpha}{2k} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right) \simeq 2\hbar\omega - \frac{\alpha\hbar}{2m\omega} \quad (30)$$

$$E_1^\pm \simeq 2\hbar\omega \pm \frac{\alpha\hbar}{2m\omega} \quad (31)$$

come nell'esercizio 3.

Esercizio 5. Sia $\alpha = 0$, l'hamiltoniana del sistema è

$$H = H_0 - \frac{\lambda}{2\hbar} \left(\vec{s}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2 \right). \quad (32)$$

Supponiamo che la separazione tra il tripletto ed il singoletto sia minore di quella tra diversi livelli dell'oscillatore armonico, cioè che $\lambda \ll \omega$.

Lo stato fondamentale è quello in cui $n_1 = n_2 = 0$, ad esso è associata l'autofunzione spaziale

$$\psi_0(x_1, x_2) = H_0(x_1)H_0(x_2), \quad (33)$$

(dove $H_0(x)$ è l'autofunzione dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico unidimensionale nella base delle coordinate) che è necessariamente simmetrica per scambio di particelle, e a cui dobbiamo associare lo stato di singoletto ($s = 0$) antisimmetrico per la parte spinoriale, quindi lo stato ha $deg = 1$, e autovalore d'energia

$$E_0 = \hbar\omega + \frac{3}{4}\lambda\hbar. \quad (34)$$

La prima eccitazione spaziale si ottiene ponendo una delle due particelle nel primo livello dell'oscillatore armonico. La funzione d'onda spaziale può essere scelta come simmetrica od antisimmetrica, con la funzione d'onda di spin rispettivamente antisimmetrica o simmetrica. Poiché l'energia del tripletto è più bassa di quella del singoletto, il primo livello eccitato si ottiene con funzione d'onda spaziale antisimmetrica:

$$E_1^- = 2\hbar\omega - \frac{\lambda\hbar}{4}, \quad \text{con } s = 1 \quad (35)$$

con $deg = 3$, la cui autofunzione spinoriale è il tripletto simmetrico, e l'autofunzione spaziale è

$$\psi_1^-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(H_0(x_1)H_1(x_2) - H_1(x_1)H_0(x_2) \right). \quad (36)$$

Il secondo livello eccitato si trova prendendo la funzione d'onda spaziale simmetrica:

$$E_1^+ = 2\hbar\omega + \frac{3\lambda\hbar}{4}, \quad \text{con } s = 0, \quad (37)$$

con $deg = 1$, la cui autofunzione spinoriale è il singoletto antisimmetrico, e l'autofunzione spaziale è

$$\psi_1^+(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (H_0(x_1)H_1(x_2) + H_1(x_1)H_0(x_2)). \quad (38)$$

Esercizio 6. Utilizziamo il sistema di coordinate del centro di massa e relativa, in questa sistema lo scambio di particelle equivale alle trasformazioni $X \rightarrow X$ e $x \rightarrow -x$.

Le disuguaglianze date ci dicono che la separazione dei livelli dovuta allo spin è minore della separazione dovuta alla variazione dei numeri quantici dei due oscillatori armonici, ed inoltre che la differenza di energia di eccitazione tra i due oscillatori armonici è minore della spaziatura dei livelli di ciascuno di essi.

Ne segue che lo stato fondamentale è quello in cui $N = n = 0$, ad esso è associata (per la parte spaziale) l'autofunzione

$$\psi_0(X, x) = H_0(X)H_0(x), \quad (39)$$

che è simmetrica per scambio di particelle, poiché la parità delle autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale è $H_n(x)$ è $(-1)^n$.

A questa autofunzione dobbiamo associare il singoletto ($s = 0$) antisimmetrico per la parte spinoriale, quindi lo stato ha $deg = 1$, e autovalore d'energia

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} (\Omega + \bar{\omega}) + \frac{3}{4}\lambda\hbar. \quad (40)$$

Il primo stato eccitato si ottiene con $N = 0$ e $n = 1$ (poiché $\bar{\omega} < \Omega$), ad esso è associata per la parte spaziale l'autofunzione

$$\psi_1(X, x) = H_0(X)H_1(x), \quad (41)$$

che è antisimmetrica per scambio di particelle, e a cui dobbiamo obbligatoriamente associare il tripletto ($s = 1$) simmetrico per la parte spinoriale, quindi lo stato ha $deg = 3$, e autovalore d'energia

$$E_1 = \frac{\hbar}{2}\Omega + \frac{3}{2}\hbar\bar{\omega} - \frac{\lambda\hbar}{4}. \quad (42)$$

Il secondo stato eccitato si ottiene con $N = 1$ e $n = 0$, ad esso è associata per la parte spaziale l'autofunzione

$$\psi_2(X, x) = H_1(X)H_0(x), \quad (43)$$

che è simmetrica per scambio di particelle, e a cui dobbiamo associare il singoletto antisimmetrico per la parte spinoriale, quindi lo stato ha $deg = 1$, e autovalore d'energia

$$E_2 = \frac{3}{2}\hbar\Omega + \frac{\hbar}{2}\bar{\omega} + \frac{3\lambda\hbar}{4}. \quad (44)$$

Esercizio 7. Lo stato di partenza è

$$|\psi, t = -\infty\rangle = |1-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle - |1, 0\rangle) |1, s_z\rangle, \quad (45)$$

con energia E_1^- (vedi esercizio 5).

Utilizzando la teoria perturbativa dipendente dal tempo al primo ordine, l'ampiezza di probabilità di transizione dallo stato di partenza a uno stato $|m\rangle$ è data da

$$A_m^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{\frac{i}{\hbar} t' (E_m - E_1^-)} \right) \langle m | \alpha V | \psi, t = -\infty \rangle \quad (46)$$

dove $\alpha V = \alpha x_1 x_2 \theta(t) \theta(t_0 - t)$. Scrivendo la perturbazione in termini degli operatori di creazione e distruzione

$$\alpha V = \frac{\alpha \hbar}{2m\omega} (a_1 + a_1^\dagger) (a_2 + a_2^\dagger), \quad (47)$$

si nota che l'unica transizione permessa è verso lo stato

$$|3-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 1\rangle - |1, 2\rangle) |1, s_z\rangle, \quad (48)$$

che ha energia

$$E_3^- = 4\hbar\omega - \frac{\lambda\hbar}{4}. \quad (49)$$

La probabilità (al primo ordine) che al tempo $t = \infty$ il sistema abbia subito una transizione è quindi

$$P_{trans} = |A_m^{(1)}|^2 = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}m\omega^2} \right)^2 \sin^2(\omega t_0), \quad (50)$$

che è massima quando

$$t_0 = \omega^{-1} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \quad (51)$$