ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

25 febbraio 2019

Traccia di soluzione

(1) L'equazione di Heisenberg è

$$\begin{aligned} v_i &= -\frac{i}{\hbar}[x_i, H] = -\frac{i}{\hbar}[x_i, \frac{1}{2m}\sigma_k(p_k - A_k)\sigma_j(p_j - A_j)] \\ &= \frac{1}{2m}\left[\sigma_k\sigma_i(p_k - A_k) + \sigma_i\sigma_j(p_j - A_j)\right] \\ &= \frac{1}{2m}\left[\sigma_k\sigma_i + \sigma_i\sigma_k\right](p_k - A_k) = \frac{1}{m}(p_i - A_i)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

dove abbiamo usato il commutatore canonico $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, e nell'ultimo passaggio abbiamo usato il suggerimento per calcolare il prodotto di matrici di Pauli.

(2) Il commutatore vale

$$\begin{aligned} [v_i, v_j] &= \left[\frac{1}{m}(p_i - A_i), \frac{1}{m}(p_j - A_j)\right] = -\frac{1}{m^2}\left([p_i, A_j)] + [A_j, p_i]\right) = \frac{i\hbar}{m^2}(\partial_i A_j(\vec{x}) - \partial_j A_i(\vec{x})) \\ &= \frac{i\hbar}{m^2}\epsilon^{ijk}B^k. \end{aligned} \tag{2}$$

(3) L'equazione di Heisenberg è

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{i}{\hbar}[p_i, H] = -\frac{i}{\hbar}[p_i, \frac{1}{2m}\sigma_k(p_k - A_k)\sigma_j(p_j - A_j)] = \cdots \\ &= \frac{\sigma_k\sigma_j}{2m}\left[(p_k - A_k)\partial_i A_j + \partial_i A_k(p_j - A_j)\right]\,. \end{aligned} \tag{3}$$

È possibile semplificare ulteriormente il risultato (semplificazione non richiesta) riscrivendolo come

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \frac{\sigma_k\sigma_j}{2m}\left(\partial_i A_j p_k + \partial_i A_k p_j - A_k\partial_i A_j - \partial_i A_k A_j + \partial_i[p_k, A_j]\right) \\ &= \frac{1}{m}\partial_i A_j(p_j - A_j) - \frac{\hbar}{m}\partial_i\vec{\sigma}\cdot\vec{B}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

dove nell'ultimo passaggio sono state usate le Eq. (2) e (5) del testo d'esame.

(4) Tutti i termini nell'equazione del moto Eq. (3) per p_i sono proporzionali a $\partial_i A_j$. Dunque tutti i termini dell'equazione del moto per p_2 o p_3 sono proporzionali alla derivata rispetto a rispettivamente x_2 o x_3 di qualche componente di $\vec{A}$. Ma $\vec{A}$ dipende solo da x_1 dunque tutte queste derivate si annullano.

Ne segue che p_2 e p_3 sono conservati in quanto la Eq. (3) dà $\dot{p}_2 = \dot{p}_3 = 0$.

(5) Si veda ad esempio il testo Sez.(10.4.2).

(6) Utilizzando il suggerimento e ricordando il commutatore Eq. (2) si trova

$$H = \frac{m}{2}(\vec{\sigma} \cdot \vec{v})^2 = \frac{m}{2}(\sigma_i v_i \sigma_j v_j) = \frac{m}{2}(\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k)v_i v_j = \frac{m}{2}(\vec{v}^2 - \frac{\hbar}{m^2}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}). \tag{6}$$

Usando ora la forma esplicita di $\vec{A}$

$$B_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\partial_i A_j - \partial_j A_i) = \frac{B}{2}\epsilon_{ijk}(\partial_i \delta_{j2} x_1 - \partial_j \delta_{i2} x_1) = \frac{B}{2}(\epsilon_{12k} - \epsilon_{21k}) = \delta_{k3} B \tag{7}$$

da cui

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}. \tag{8}$$

e quindi $[\vec{v}^2, \vec{\sigma} \cdot \vec{B}] = [\vec{v}^2, \sigma_3 B_3] = 0$.

Ne segue che

$$H = H_0 + H_s \tag{9}$$

dove

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{m}{2}\vec{v}^2 \\ &= \frac{1}{2m}\left[p_1^2 + (p_2 - Bx_1)^2 + p_3^2\right], \end{aligned} \tag{10}$$

avendo usato nell'ultimo passaggio la forma esplicita di $\vec{A}$, e

$$H_s = -\frac{1}{2m}\hbar\sigma_3 B\,. \tag{11}$$

con

$$[H_s, H_0] = 0 \tag{12}$$

e la hamiltoniana è separata nella somma di una hamiltoniana spaziale H_0 ed una hamiltoniana di spin H_s.

(7) Visto che

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + (p_2 - Bx_1)^2 + p_3^2 - \hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{B}), \tag{13}$$

commuta con p_2 e p_3 essa può essere diagonalizzata simultaneamente a p_2 e p_3. In un autostato di p_2 e p_3 la si ha quindi

$$H_1 = H_o + H_s \tag{14}$$

dove H_o è data da

$$H_o = \frac{1}{2m}(p_1^2 + (\hbar k_2 - Bx_1)^2 + \hbar^2 k_3^2)\,. \tag{15}$$

ed è una hamiltoniana di oscillatore armonico unidimensionale avente pulsazione

$$\omega = \frac{B}{m}. \tag{16}$$

Gli autovalori di H si ottengono quindi sommando gli autovalori

$$s_z = \pm\frac{\hbar}{2} \tag{17}$$

di H_s, corrispondenti ai due stati di terza componente dello spin, e gli autovalori di H_o, che sono quelli di un oscillatore armonico unidimensionale. Si ha dunque

$$\begin{aligned} E_{ns_z} &= \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2m} - \omega s_z \\ &= \hbar\omega(n+m+\frac{1}{2}) + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2m} \qquad (18) \\ &= \hbar\omega N + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2m} \qquad (19) \end{aligned}$$

dove $s_z = \hbar m$ con $m = \pm\frac{1}{2}$, e

$$N = n + m + \frac{1}{2} \tag{20}$$

è un intero non negativo. Tutti gli stati eccetto lo stato fondamentale sono quindi doppiamente degeneri, in quanto qualunque valore di N pùo essere realizzato in due modi, con $m = \pm\frac{1}{2}$. Lo stato fondamentale invece è non-degenere e si ottiene quando $n = 0$, $m = -\frac{1}{2}$.

(8) Le autofunzioni sono

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} e^{-i(k_2x_2+k_3x_3)} \varphi_n(x_1)\,, \tag{21}$$

con $\varphi_n(x)$ autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale. $\psi(\vec{x})$ è quindi normalizzabile in senso improprio. Visto che, come discusso, H può essere diagonalizzata simultaneamente a p_2 e p_3, ma gli autovalori di H_1 Eq. (18) non dipendono dall'autovalore di p_2 e p_3, ne segue che gli autovalori di H sono gli stessi degli autovalori H_1 e quindi lo spettro di H è dato dalla Eq. (18). Tuttavia, ora ciascun autovalore è infinitamente degenere in quanto può essere ottenuto per qualunque valore di k_2 e k_3.

(9) La perturbazione al primo ordine è

$$\Delta E^{(1)} = -E\langle nk_2k_3|x_1|nk_2k_3\rangle = -E\frac{\hbar k_2}{B}\,, \tag{22}$$

essendo $\langle x_1\rangle$ il valor medio della posizione per un oscillatore armonico traslato. Risolvendo esattamente abbiamo che (completando il quadrato)

$$H_E = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{B^2}{2m}\left(\frac{\hbar k_2}{B} + \frac{mE}{B^2} - x_1\right)^2 - \frac{mE^2}{2B^2} - \frac{\hbar k_2 E}{B}\,, \tag{23}$$

per cui

$$\Delta E = -\frac{\hbar k_2 E}{B} - \frac{mE^2}{2B^2}\,, \tag{24}$$

che coincide, al primo ordine in E, con il risultato perturbativo.

(10) Le equazioni agli autovalori per le due hamiltoninane sono

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle\,, \qquad H'|\psi'\rangle = E|\psi'\rangle \tag{25}$$

da cui

$$\langle\vec{x}|\frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-\vec{A}))^2|\psi\rangle = E|\psi\rangle\,, \qquad \langle\vec{x}|\frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-\vec{A}'))^2|\psi\rangle = E|\psi'\rangle = Ee^{\frac{i}{\hbar}\Lambda(\vec{x})}|\psi\rangle\,. \tag{26}$$

Eguagliando otteniamo

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda(\vec{x})}(\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-\vec{A}'))e^{\frac{i}{\hbar}\Lambda(\vec{x})}e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda(\vec{x})}(\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-\vec{A}')) = (\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-\vec{A}'))^2 \tag{27}$$

da cui si ricava facilmente che

$$A'_i(\vec{x}) = A_i(\vec{x}) + \partial_i\Lambda(\vec{x})\,. \tag{28}$$