Traccia di soluzione

Esame del 19 Giugno 2013

Esercizio 1. Le coordinate relative e del baricentro sono

$$\vec{r} = \vec{x}_e - \vec{x}_p, \tag{1}$$

$$\vec{R} = \frac{m_e\vec{x}_e + m_p\vec{x}_p}{M}, \tag{2}$$

con

$$M = m_e + m_p, \tag{3}$$

e gli impulsi ad esse coniugati sono

$$\vec{p} = \frac{m_p\vec{p}_e - m_e\vec{p}_p}{M}, \tag{4}$$

$$\vec{P} = \vec{p}_e + \vec{p}_p. \tag{5}$$

Separando il moto del baricentro da quello relative l'hamiltoniana diventa

$$H = H_B + H_R + H_S, \tag{6}$$

dove

$$H_B = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}\frac{M^2}{m_p}\omega^2\vec{R}^2, \tag{7}$$

$$H_R = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{\parallel \vec{r} \parallel}, \tag{8}$$

$$H_S = \lambda\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \tag{9}$$

dove

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p}. \tag{10}$$

Nel limite in cui $m_p \gg m_e$ si ha

$$H_B = \frac{\vec{P}^2}{2m_p} + \frac{1}{2}m_p\omega^2\vec{R}^2, \tag{11}$$

$$H_R = \frac{\vec{p}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{\parallel \vec{r} \parallel}. \tag{12}$$

Esercizio 2. L'hamiltoniana spaziale è la somma di un'hamiltoniana idrogenoide (moto relativo), un'hamiltoniana di oscillatore armonico (moto baricentrale) e di un'hamiltoniana di spin.

Lo spettro delle hamiltoniane barincentrale e relativa è noto. Quello dell'hamiltoniana di spin si determina partendo

$$\vec{s} = \vec{s}_e + \vec{s}_p, \tag{13}$$

$$\vec{s}_e \cdot \vec{s}_p = \frac{1}{2}\left[(\vec{s}_e + \vec{s}_p)^2 - \vec{s}_e^2 - \vec{s}_p^2\right]. \tag{14}$$

Pertanto detti $|1,1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|1,-1\rangle$; $|1,1\rangle$ gli autostati di $|\vec{s}_{tot}|^2$, $\vec{s}_{tot}^2$ (con ovvia notazione) si ha

$$H_S|1,m\rangle = \frac{1}{2}\lambda\left(2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{\lambda}{4}, \tag{15}$$

$$H_S|0,0\rangle = \frac{1}{2}\lambda\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}\lambda. \tag{16}$$

Ne segue che lo stato fondamentale è lo stato avente numeri quantici $|0,0,0\rangle$ (moto baricentrale), $|1,0,0\rangle$ (moto relativo) e $|0,0\rangle$ (spin), energia pari a

$$E_{000,100,00} = \frac{3}{2}\hbar\omega\sqrt{\frac{M}{m_p}} - \frac{\mu e^4}{2\hbar^2} - \frac{3}{4}\lambda \tag{17}$$

e funzione d'onda data da

$$\psi_{000,100,00}(\vec{R},\vec{r}) = \mathcal{N}\exp\left[-\frac{R^2 M}{2\hbar}\sqrt{\frac{M}{m_p}}\omega\right]\exp\left[-\frac{e^2\mu r}{\hbar^2}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle - |-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\right). \tag{18}$$

(Nel caso $m_p \gg m_e$ porre $M \approx m_p$, $\mu \approx m_e$)

Esercizio 3. La funzione d'onda di spin è

$$|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle + |0,0\rangle\right) \tag{19}$$

dove si è convenzionalmente definita la fase del singoletto come

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow,\downarrow\rangle - |\downarrow,\uparrow\rangle\right). \tag{20}$$

[Notare che se si pone invece

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow,\uparrow\rangle - |\uparrow,\downarrow\rangle\right), \tag{21}$$

allora

$$|\uparrow,\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle - |0,0\rangle\right). \tag{22}$$

Esercizio 4. La funzione d'onda spaziale al tempo t è data da

$$\psi_{000,100}(\vec{R},\vec{r};t) = \exp\left[\frac{1}{i\hbar}\left(E_{000,100}\right)t\right]\psi(\vec{R},\vec{r};0). \tag{23}$$

La funzione d'onda di spin è data da

$$|s;t\rangle = \frac{e^{\frac{1}{i\hbar}\frac{\lambda}{4}t}|1,0\rangle + e^{-\frac{1}{i\hbar}\frac{3}{4}\lambda t}|0,0\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{24}$$

pertanto

$$\begin{aligned}
\langle\downarrow,\uparrow;t|\uparrow,\downarrow;0\rangle &= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\lambda t}{2i\hbar}} - e^{-\frac{1}{i\hbar}\frac{3}{4}\lambda t}\right) && (25)\\
&= \frac{1}{2}e^{-\frac{\lambda t}{4i\hbar}}\left(e^{\frac{\lambda t}{2i\hbar}} - e^{-\frac{1}{i\hbar}\frac{\lambda t}{2}}\right) && (26)\\
&= -ie^{-\frac{\lambda t}{4i\hbar}}\sin\left(\frac{\lambda t}{2\hbar}\right), && (27)
\end{aligned}$$

e quindi la probabilità è

$$P = \sin^2\left(\frac{\lambda t}{2\hbar}\right). \tag{28}$$

Esercizio 5. (a) Poiché il moto relativo è soggetto ad un potenziale idrogenoide, $l = 1$ richiede che $n \geq 2$. Pertanto l'energia minimi è ora

$$E_{000,211,00} = \frac{3}{2}\hbar\omega\sqrt{\frac{M}{m_p}} - \frac{\mu e^4}{8\hbar^2} - \frac{3}{4}\lambda. \tag{29}$$

(b) Se $j = 0$ allora anche la terza componente $j_2 = 0$. Ma

$$J_2 = L_2 + S_2, \tag{30}$$

pertanto lo stato $|j = 0, j_2 = 0\rangle$ è una sovrapposizione di stati per cui $L_2 + S_2 = 0$. Tuttavia lo stato dato ha terza componente dello spin $s_2 = 0$ (cfr. Eq. (19)) e terza componente del momento angolare orbitale $m = 1$ per ipotesi.

Pertanto $L_2 + S_2 \neq 0$ sempre, e la probabilità è nulla.

Esempio 6. Possiamo scrivere l'hamiltoniana come

$$H = H_0 + \Delta, \tag{31}$$

dove H_0 è l'hamiltoniana data al punto (1) e

$$\Delta = \theta(r - r_0)\frac{e^2}{r}\left[1 - e^{-\tau(r-r_0)}\right]. \tag{32}$$

La perturbazione al primo ordine all'energia è

$$\Delta E^{(1)} = N\int_{r_0}^{\infty} dr\, r\, e^{-\frac{2r}{a_0}}\left(1 - e^{-\tau(r-r_0)}\right), \tag{33}$$

dove abbiamo posto $a_0 = \frac{e^2\mu}{\hbar^2}$ (cfr Eq. (18)), e possiamo determinare

$$N = \frac{4e^2}{a_0^3} \tag{34}$$

imponendo $N\int_0^\infty dr\, r\, e^{-2r/a_0} = 1$. Troviamo

$$\Delta E^{(1)} = \tau r^2 e^{-2r_0/a_0} \frac{\left(1 + \frac{r_0}{a_0} + \frac{\tau a_0}{4}\left(1 + \frac{2r_0}{a_0}\right)\right)}{\left(1 + \frac{\tau a_0}{2}\right)^2}; \tag{35}$$

Al primo ordine in τ abbiamo

$$\Delta E^{(1)} = \tau e^2 e^{-2r_0/a_0}\left(1 + \frac{r_0}{a_0}\right). \tag{36}$$