ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

24 Giugno 2015

Traccia di soluzione

(1) Ricordando che $[p, f(q)] = -i\hbar \frac{df(q)}{dq}$ si ha

$$[v_i, v_j] = -\frac{1}{m^2}\Big([p_i, A_j] + [A_i, p_j]\Big) = \frac{\mathrm{i}\,\hbar}{m^2}(\partial_i A_j(\vec{x}) - \partial_j A_i(\vec{x})) \tag{1}$$

e

$$\frac{dv_j}{dt} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H, v_j] = \frac{\mathrm{i}\,m}{2\hbar}\Big(v_i[v_i, v_j] + [v_i, v_j]v_i\Big) = -\frac{1}{2m}\Big(v_i(\partial_i A_j(\vec{x}) - \partial_j A_i(\vec{x})) - (\partial_i A_j(\vec{x}) - \partial_j A_i(\vec{x}))v_i\Big)\,. \tag{2}$$

(2) Abbiamo che

$$H = \frac{1}{2m}\Big(\vec{p}^2 - Bp_2x_1 - Bx_1p_2 + \vec{A}^2\Big) = \frac{1}{2m}\Big(p_1^2 + (p_2 - Bx_1)^2 + p_3^2\Big) \tag{3}$$

da cui

$$[p_2, H] = [p_3, H] = 0\,. \tag{4}$$

$|p_2\rangle$ e $|p_3\rangle$ sono quindi autostati dell'hamiltoniana con rispettivi autovalori $\hbar k_2$ e $\hbar k_3$, e le corrispondenti autofunzioni sono

$$\begin{aligned}\psi_{k_2}(x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik_2x_2}\,,\\ \psi_{k_3}(x_3) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik_3x_3}\,.\end{aligned} \tag{5}$$

L'hamiltoniana unidimensionale H_1 è data da

$$H_1 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{B^2}{2m}\left(\frac{\hbar k_2}{B} - x_1\right)^2 + \hbar^2 k_3^2\,, \tag{6}$$

ovvero l'hamiltoniana di un oscillatore armonico traslato con un termine costante additivo.

(3) Lo spettro è dato da

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \hbar^2 k_3^2\,, \qquad \text{dove} \quad \omega = \frac{B}{m} \quad \text{e} \quad n = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{7}$$

con degenerazione infinita (lo spettro è indipendente dal valore di p_2). Lo spettro dipende da k_3 ed è quindi uno spettro continuo. Le autofunzioni nella base delle coordinate non sono normalizzabili.

(4) Trattando il termine Ex_1 come una perturbazione, al prim'ordine abbiamo che

$$E_n^{(1)} = \langle n, k_2, k_3|Ex_1|n, k_2, k_3\rangle = -E\frac{\hbar k_2}{B}\,, \tag{8}$$

dove per ottenere il valor medio della posizione è stato usato il fatto che le autofunzioni dell'oscillatore armonico hanno parità definita.

Determinando lo spettro in modo esatto abbiamo che

$$H_E = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{B^2}{2m}\left(\frac{\hbar k_2}{B} + \frac{E}{m\omega} - x_1\right)^2 + \hbar^2 k_3^2 - \frac{E^2}{2m\omega} - \frac{\hbar k_2 E}{B}\,, \tag{9}$$

che coincide, al prim'ordine, con il risultato perturbativo.

(5) Abbiamo che

$$H_s = H - \mu B \sigma_3\,, \tag{10}$$

e quindi

$$E_s = E - \mu B \hbar s_3\,. \tag{11}$$

Il sistema si trova nello stato fondamentale, pertanto in un autostato di S_3 con autovalore $s_3 = \frac{1}{2}$ e con $n = 0$, $k_3 = 0$ e k_2 qualsiasi. Indichiamo quindi con $|0\rangle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle_{s,s_1}$ lo stato fondamentale del sistema. La probabilità che una misura dello spin lungo x_1 riveli il sistema in uno stato di spin su è $P_1 = \frac{1}{2}$.

L'evoluzione temporale del sistema, la cui prima misura dello spin lungo x_1 al tempo $t = 0$ ha rivelato un uno stato di spin su, è data da

$$|\psi,t\rangle = e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_s t}|\psi,0\rangle = e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_s t}|0\rangle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle_{s,s_1} = e^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{2}t}|0\rangle e^{\frac{\mathrm{i}\mu B\sigma_3}{\hbar}t}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle_{s,s_1}\,. \tag{12}$$

La probabilità che entrambe le misure rivelino il sistema in uno stato di spin su è $P = P_1 P_2$ dove

$$P_2 = \left|\,{}_{s,s_1}\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|e^{\frac{\mathrm{i}\mu B\sigma_3}{\hbar}t}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle_{s,s_1}\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\mu B t}{2\hbar}\right)\,, \tag{13}$$

dove abbiamo usato

$$|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle_{s,s_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle_{s,s_3} + \mathrm{i}\,|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle_{s,s_3}\right)\,. \tag{14}$$

(6) Abbiamo che

$$H_s = \frac{1}{2m}\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - \vec{A}(\vec{x})\right)\right]^2 = \frac{m}{2}\sigma_i\sigma_k v_i v_k = \frac{m}{2}\left(\delta_{ik} + \mathrm{i}\epsilon_{ikl}\sigma_l\right)v_i v_k = \frac{m}{2}\vec{v}^{\,2} - \mu\vec{B}\cdot\vec{\sigma},\,. \tag{15}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo osservato che $\epsilon_{ikl}v_i v_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}[v_i, v_k] = -i\hbar\frac{1}{m^2}\epsilon_{ikl}\partial_k A(x_l)$ e quindi $\mu = -\frac{\hbar}{2m}$. Usando il risultato precedente

$$H_s = \frac{1}{2m}\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - \vec{A}(\vec{x})\right)\right]^2 = \frac{1}{2m}\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{v}\right)^2\,, \tag{16}$$

da cui

$$[\vec{\sigma}\cdot\vec{v}, H] = 0\,, \tag{17}$$

e $\vec{\sigma}\cdot\vec{v}$ è quindi una costante del moto.