

Esame Scritto di Meccanica Quantistica

Traccia di soluzione

27 Giugno 2017

1. Per esprimere la hamiltoniana data

$$H = \frac{P^2}{4m} + \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(2X^2 + \frac{1}{2}x^2 \right) \quad (1)$$

in termini di x_1 e x_2 si esegue il cambiamento di coordinate

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad x_1 = X + \frac{x}{2} \quad P = p_1 + p_2 \quad (2)$$

$$x = x_1 - x_2 \quad x_2 = X - \frac{x}{2} \quad p = \frac{1}{2}(p_1 - p_2) \quad (3)$$

ottenendo

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2. \quad (4)$$

2. La funzione d'onda dello stato fondamentale è

$$\psi_0(x_1, x_2) = \psi_0(x_1) \psi_0(x_2) \quad (5)$$

con

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \quad (6)$$

Poiché la hamiltoniana è stata separata nella somma di due hamiltoniane di oscillatore armonico unidimensionale aventi la stessa pulsazione ω , l'energia è la somma delle energie e le autofunzioni sono il prodotto delle autofunzioni dei due oscillatori. Lo spettro è quindi

$$E_{n_1 n_2} = \hbar\omega (n_1 + n_2 + 1), \quad (7)$$

dove n_i sono interi $n_i \geq 0$, che si può riscrivere come

$$E_N = \hbar\omega (N + 1), \quad (8)$$

dove N è un intero $N \geq 0$. Confrontando le Eq. (7-8) si vede immediatamente che la degenerazione dell' N -esimo livello è data da

$$d = N + 1. \quad (9)$$

Le autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale hanno la proprietà

$$\psi_{n_1}(-x_1) = (-1)^{n_1} \psi_{n_1}(x_1) \quad (10)$$

$$\psi_{n_2}(-x_2) = (-1)^{n_2} \psi_{n_2}(x_2). \quad (11)$$

Visto che il problema è separabile, l'autofunzione associata al limello $E_{n_1 n_2}$ è il prodotto di due autofunzioni unidimensionali, e quindi

$$\begin{aligned} \psi_{n_1 n_2}(-x_1, -x_2) &= \psi_{n_1}(-x_1) \psi_{n_2}(-x_2) = (-1)^{n_1+n_2} \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) \\ &= (-1)^{n_1+n_2} \psi_n(x_1, x_2) = (-1)^N \psi_n(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Infine, dalla definizione si vede immediatamente che sia la coordinata relativa sia la coordinata baricentrale cambiano segno sotto la trasformazione data (parità).

3. *Domanda di teoria:* Si veda la sezione 9.3.2 del testo, in particolare le Eq. (9.81-9.86) oppure (9.92-9.96). Qualunque dei due argomenti è considerato una soluzione corretta.
4. Le autofunzioni con il potenziale dato si annullano necessariamente quando $x_1 \leq 0$ oppure $x_2 \leq 0$, come si vede notando che per valori finiti del potenziale esse sono esponenzialmente sopresse in questa regione:

$$\psi_n(x_1, 0) = 0 \quad \forall x_1 > 0, \quad (13)$$

$$\psi_n(0, x_2) = 0 \quad \forall x_2 > 0. \quad (14)$$

Ma le Eq. (10) implicano immediatamente che $\psi_n(x)$ si annulla nell'origine se e solo se n è dispari, e quindi le autofunzioni ammissibili sono il sottoinsieme di quelle della domanda 2 con n_1 e n_2 dispari, e di conseguenza $N = n_1 + n_2$ è pari e maggiore di zero visto che n_i sono non-negativi.

Inoltre, visto che le particelle sono ora fermioni identici di spin $1/2$ la autofunzione totale del sistema deve essere antisimmetrica. Questo però non impone alcuna ulteriore restrizione in quanto, qualunque siano i valori di n_1 e n_2 è sempre possibile prendere una funzione d'onda di spin antisimmetrica se quella spaziale è simmetrica o viceversa. Lo spettro è quindi

$$E_N = \hbar\omega(N + 1) \quad \text{con } N > 0, \quad N \text{ pari}, \quad (15)$$

e non dipende dallo spin s_z^1 e s_z^2 delle due particelle.

Scriviamo ora le funzioni d'onda richieste in termini degli autostati $|n_1 n_2\rangle$ di energia dei due oscillatori armonici, e gli autostati di spin totale di singoletto e tripletto, rispettivamente $|ss_z\rangle = |00\rangle$ e $|ss_z\rangle = |1s_z\rangle$. Le funzioni d'onda e degenerazioni per lo stato fondamentale ed i primi due stati eccitati sono le seguenti:

- Stato fondamentale: $N = 2$:

$$|n_1 n_2\rangle |ss_z\rangle = |11\rangle |00\rangle. \quad (16)$$

Non degenera: la funzione d'onda spaziale è necessariamente simmetrica, e quindi quella di spin è necessariamente antisimmetrica.

- Primo stato eccitato: $N = 4$

$$|n_1 n_2\rangle |ss_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|13\rangle + |31\rangle) |00\rangle, \quad (17)$$

non degenera; oppure

$$|n_1 n_2\rangle |ss_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|13\rangle - |31\rangle) |1s_z\rangle, \quad (18)$$

tre volte degenera ($s_z = -1, 0, 1$). La degenerazione totale è quindi $d = 4$

- Secondo stato eccitato: $N = 6$

$$|n_1 n_2\rangle |ss_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|15\rangle + |51\rangle) |00\rangle, \quad (19)$$

non degenera; oppure

$$|n_1 n_2\rangle |ss_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|15\rangle - |51\rangle) |1s_z\rangle, \quad (20)$$

tre volte degenera ($s_z = -1, 0, 1$); oppure

$$|n_1 n_2\rangle |ss_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|33\rangle + |33\rangle) |00\rangle, \quad (21)$$

non degenera, perché la funzione d'onda spaziale è necessariamente simmetrica, e quindi quella di spin è necessariamente antisimmetrica.

La degenerazione totale è quindi $d = 5$.

5. Poiché non vi è interazione tra i gradi di libertà spaziali e quelli di spin, l'energia è semplicemente la somma dell'autovalore della hamiltoniana spaziale data nella domanda (3) e della hamiltoniana di spin. Gli autovalori della hamiltoniana di spin si possono determinare riscrivendo

$$H_s = -B \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = -\frac{B}{2} (S^2 - s_1^2 - s_2^2) = -\frac{B}{2} \left(S^2 - \frac{3}{2} \right), \quad (22)$$

dove S è lo spin totale, e quindi

$$E_s = -\hbar^2 \frac{B}{2} \left(s(s+1) - \frac{3}{2} \right); \quad (23)$$

i valori permessi di s sono $s = 1$ (tripletto) e $s = 0$ (singoletto) associati rispettivamente agli autovalori

$$E_0 = \frac{3}{4} \hbar^2 B \quad (24)$$

$$E_1 = -\frac{1}{4} \hbar^2 B. \quad (25)$$

Il generico autovalore di energia è quindi

$$E_{Ns} = E_N + E_s, \quad (26)$$

con E_N ed E_s dati rispettivamente dalle Eq. (8) e (23).

A seconda che $\hbar B \gg \omega$ o $\hbar B \ll \omega$ l'ordinamento dei livelli è determinato rispettivamente da E_s o da E_N :

- Nel caso $\hbar B \gg \omega$, lo stato fondamentale ed i primi due livelli eccitati sono tutti stati con $s = 1$:

$$E_0 = E_{41} = -\frac{1}{4} \hbar^2 B^2 + 5\hbar\omega, \quad (27)$$

$$E_1 = E_{61} = -\frac{1}{4} \hbar^2 B^2 + 7\hbar\omega, \quad (28)$$

$$E_2 = E_{81} = -\frac{1}{4} \hbar^2 B^2 + 9\hbar\omega, \quad (29)$$

dove abbiamo osservato che se $N = 2$ allora $n_1 = n_2 = 1$, quindi la funzione d'onda di spin deve essere antisimmetrica e lo stato di tripletto è proibito.

- Nel caso $B \ll \omega$ abbiamo invece

$$E'_0 = E_{20} = 3\hbar\omega + \frac{3}{4} \hbar^2 B^2, \quad (30)$$

$$E'_1 = E_{41} = 5\hbar\omega - \frac{1}{4} \hbar^2 B^2, \quad (31)$$

$$E'_2 = E_{40} = 5\hbar\omega + \frac{3}{4} \hbar^2 B^2, \quad (32)$$

dove abbiamo osservato che se $N = 2$ allora $n_1 = n_2 = 1$, quindi la funzione d'onda di spin deve essere antisimmetrica e necessariamente $s = 0$.

6. Il potenziale dato può essere riscritto come

$$V(t) = g e^{-t\lambda a_1^\dagger} \quad (33)$$

dove a_1^\dagger è il consueto operatore di creazione. Al primo ordine in g osserviamo che la funzione d'onda per lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato sono rispettivamente date dalla Eq. (16) e dalle Eq. (17) oppure Eq. (18). Tuttavia, transizioni tra lo stato Eq. (16) e lo

stato Eq. (18) sono proibite perché il primo si trova in un singoletto di spin ed il secondo in un tripletto di spin, e solo le transizioni allo stato Eq. (17) sono permesse.

L'ampiezza della transizione al primo ordine è quindi

$$P_{1,0} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' e^{i(2\omega)t'} \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 3| V(t') |1\rangle \right|^2, \quad (34)$$

dove $|n_1\rangle$ sono stati di singola particella relativi alla prima particella, visto che il potenziale non dipende da x_2 .

L'elemento di matrice può essere valutato facilmente sviluppando l'esponenziale

$$\langle 3| V(t') |1\rangle = g \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle 3| (-1)^n \lambda^n t'^n (a^\dagger)^n |1\rangle = \frac{1}{2} g \lambda^2 t'^2 \langle 3| (a^\dagger)^2 |1\rangle = \frac{\sqrt{6}}{2} g \lambda^2 t'^2, \quad (35)$$

avendo usato $(a^\dagger)^2 |1\rangle = \sqrt{6} |3\rangle$. Sostituendo nell'Eq. (34) troviamo

$$P_{1,0}(t) = \frac{3g^2\lambda^4}{2\hbar^2} |I(t)|^2 \quad (36)$$

dove

$$I(t) = \int_0^t dt' t'^2 e^{2i\omega t'}. \quad (37)$$

Eseguendo l'integrale esplicitamente (non richiesto) si trova

$$I(t) = \int_0^t dt' t'^2 e^{2i\omega t'} = \frac{1}{8\omega^3} (e^{2i\omega t} ((1+i) - 2i\omega t) ((1+i) + 2\omega t) - 2i) \quad (38)$$

e quindi

$$P_{1,0}(t) = \frac{3g^2\lambda^4}{16\omega^6\hbar^2} (2\omega^4 t^4 + (2\omega^2 t^2 - 1) \cos(2\omega t) - 2\omega t \sin(2\omega t) + 1). \quad (39)$$

7. Possiamo calcolare la degenerazione determinando dapprima separatamente la degenerazione dovuta allo spin per dati n_1 e n_2 e la degenerazione spaziale per dato N e poi combinando i due risultati.

Per il calcolo della degenerazione di spin, bisogna distinguere il caso $n_1 = n_2$ dal caso $n_1 \neq n_2$.

- Se $n_1 = n_2$ la funzione d'onda spaziale non può essere antisimmetrica. Ne segue che in questo caso la funzione d'onda spaziale è simmetrica e quella di spin è antisimmetrica. Pertanto il sistema si trova in uno stato di spin totale nullo e non c'è degenerazione di spin.
- Se $n_1 \neq n_2$ la funzione d'onda spaziale può essere sia simmetrica che antisimmetrica; nel primo caso la funzione d'onda di spin è antisimmetrica (e quindi non degenera) e nel secondo caso è simmetrica (e quindi tre volte degenera). Pertanto in questo caso la degenerazione di spin è quattro.

Per quanto riguarda la degenerazione spaziale, notiamo innanzitutto che, poiché solo i valori dispari di n_i sono ammessi, vi sono $N/2$ coppie di valori possibili di n_1, n_2 per dato N . Notiamo inoltre che se $N/2$ è pari (cioè se N è divisibile per 4) i valori possibili di n_1 e n_2 sono sempre tali che $n_1 \neq n_2$. In tal caso, per ogni coppia di n_1 ed n_2 è possibile formare sia una combinazione simmetrica che una antisimmetrica di ciascuna delle $N/4$ coppie distinte. Invece se $N/2$ è dispari, nel caso $n_1 = n_2$ è possibile formare solo la combinazione simmetrica, mentre per le restanti $(N/2 - 1)/2$ coppie distinte è possibile formare sia la combinazione simmetrica che quella antisimmetrica.

Per calcolare la degenerazione totale quindi bisogna distinguere due casi

- Se N è divisibile per 4, n_1 e n_2 sono sempre diversi, la degenerazione di spin è sempre quattro, e vi sono $N/4$ possibili coppie di valori distinti di n_1 e n_2 . La degenerazione totale è quindi

$$d = 4 \frac{N}{4} = N. \quad (40)$$

- Se N non è divisibile per 4, n_1 e n_2 possono essere uguali, ed in tal caso non c'è degenerazione di spin, mentre per le restanti $(N/2 - 1)/2$ coppie di valori di n_1 ed n_2 la degenerazione di spin è quattro. La degenerazione totale è dunque

$$d = 1 + 4 \left(\frac{N/2 - 1}{2} \right) = N - 1. \quad (41)$$