ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

17 giugno 2019

Traccia di soluzione

(1) Eseguendo il consueto cambio di variabili

$$\vec{X} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2}\,, \qquad \vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2\,,$$

l'hamiltoniana si separa nella somma di due termini che commutano

$$H = H_B + H_R \qquad H_B = \frac{\vec{P}^2}{2M}\,, \quad H_R = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{|\vec{x}|} + e\vec{E}\cdot\vec{x}\,, \qquad M = m_1 + m_2\,, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,,$$

con gli impulsi coniugati dati da

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2\,, \qquad \vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{2m_1 m_2}\,.$$

(2) Per $\vec{E} = 0$ l'hamiltoniana relativa si riduce a quella dell'atomo di idrogeno, pertanto

$$E^{(1)} = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}\,, \quad g_0 = 1\,, \quad \psi_1(\vec{x}) = \frac{1}{\pi^{1/2} a_0^{3/2}} e^{-|\vec{x}|/a_0}\,, \qquad E^{(2)} = -\frac{\mu e^4}{8\hbar^2}\,, \quad g_1 = 4\,,$$

con $a_0 = \hbar^2/(\mu e^2)$ il raggio di Bohr.

(3) Abbiamo che

$$\langle|\vec{x}|\rangle = \langle r\rangle = \frac{4}{a_0^3}\int_0^\infty dr\, r^3 e^{-2r/a_0} = \frac{3}{2}a_0\,,$$

e

$$\langle\frac{1}{|\vec{x}|}\rangle = \langle\frac{1}{r}\rangle = \frac{4}{a_0^3}\int_0^\infty dr\, r e^{-2r/a_0} = \frac{1}{a_0}\,.$$

da cui

$$\langle V_c\rangle = -\frac{e^2}{a_0}.$$

(4) La distribuzione di probabilità radiale è data da

$$\rho(r) = \int d\cos\theta\, d\phi\, r^2|\psi_0(\vec{x})|^2 = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0}\,.$$

Il cui massimo è dato dalla condizione

$$\frac{d\rho(r)}{dr} = \frac{8r}{a_0^3} e^{-2r/a_0} \left(1 - \frac{r}{a_0}\right) = 0\,,$$

che implica $r = a_0$ con $\frac{d^2\rho(r)}{dr^2}|_{r=a_0} < 0$.

(5) Si veda ad esempio il libro di testo (Sez. 11.3).

(6) Senza perdere in generalità consideriamo il sistema di coordinate orientato in modo tale che il campo elettrico sia lungo z ($\vec{E} = E_z \hat{z}$). La correzione richiesta è data da

$$\Delta E_0 = eE_z \int dr d\cos\theta\, d\phi\, r^2 \cos\theta |\psi_0(\vec{x})|^2 = 0$$

per parità.

(7) Abbiamo che

$$[L_z, V_E] = eE_z[L_z, z] = 0\,,$$

da cui

$$0 = \langle nlm|[L_z, V_E]|n'l'm'\rangle = eE_z(m' - m)\langle nlm|z|n'l'm'\rangle\,.$$

Quindi $\langle nlm|z|n'l'm'\rangle \neq 0$ solo se $m = m'$.

(8) Abbiamo che

$$\mathcal{P}^{-1} V_E \mathcal{P} = -V_E$$

da cui

$$-\langle nlm|z|n'l'm'\rangle = \langle nlm|\mathcal{P}^{-1} z \mathcal{P}|n'l'm'\rangle = (-1)^{l'+l} \langle nlm|z|n'l'm'\rangle$$

dove nell'ultimo passaggio è stata usata l'azione dell'operatore parità sulle armoniche sferiche

$$\mathcal{P}|lm\rangle = (-1)^l |lm\rangle.$$

Quindi $\langle nlm|z|n'l'm'\rangle \neq 0$ solo se $l + l'$ è dispari.

(9) Essendo il primo stato eccitato quattro volte degenere occorre diagonalizzare la matrice 4×4

$$V_{lm,l'm'} = eE_z \langle 2lm|z|2l'm'\rangle$$

dove l, m assumono i valori $l = 0, m = 0$ e $l = 1, m = -1, 0, 1$ (e analogamente l', m'). Utilizzando i risultati ottenuti al punto (7) e (8) si dimostra che gli elementi di matrice sono nulli eccetto $\langle 200|z|210\rangle = -3a_0$ ed il complesso coniugato. La parte nonnulla della matrice è quindi la matrice 2×2

$$V_{l0,l'0} = -3a_0 eE_z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalori $\pm 3a_0 eE_z$ e 0. La perturbazione separa il primo stato eccitato in tre livelli con correzioni

$$\Delta E_1^{\pm} = \pm 3E_z a_0, \qquad \Delta E_1^0 = 0.$$

(10) Abbiamo che

$$[L_i, [L_i, z]]|100\rangle = (L^2 z - 2L_i z L_i + z L^2)|100\rangle = L^2 z|100\rangle = 2\hbar^2 z|100\rangle$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata l'identità

$$[L_i, [L_i, x_j]] = -i\hbar\epsilon_{ijk}[L_i, x_k] = -\hbar^2\epsilon_{ijk}\epsilon_{ikl}x_l = 2\hbar^2 x_j \, .$$

Pertanto $z|100\rangle$ è autostato di L^2 con autovalore $2\hbar^2$