

ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

16 Luglio 2015

Traccia di soluzione

(1) Il sistema è separabile in due hamiltoniane di singola particella con autofunzioni

$$\psi_{n_1, n_2, n_3}(\vec{x}) = \psi_{n_1}(x) \psi_{n_2}(y) \psi_{n_3}(z), \quad (1)$$

dove

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{L}} \cos \frac{n\pi}{2L} x, & \text{se } n \text{ dispari} \\ \sqrt{\frac{1}{L}} \sin \frac{n\pi}{2L} x, & \text{se } n \text{ pari} \end{cases} \quad (2)$$

con autovalori di energia

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \quad (3)$$

Siano

$$\Psi_n(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad (4)$$

le autofunzioni del sistema complessivo. Per lo stato fondamentale abbiamo che

$$\Psi_0(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_2) \quad (5)$$

con energia

$$E_0 = 2E_{1,1,1} = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{4mL^2} \quad (6)$$

e senza degenerazione ($deg = 1$).

Per il primo stato eccitato abbiamo che

$$\Psi_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \begin{cases} \psi_{2,1,1}(\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_2) \\ \psi_{1,2,1}(\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_2) \\ \psi_{1,1,2}(\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_2) \\ \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1) \psi_{2,1,1}(\vec{x}_2) \\ \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1) \psi_{1,2,1}(\vec{x}_2) \\ \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1) \psi_{1,1,2}(\vec{x}_2) \end{cases} \quad (7)$$

con autovalore $E_1 = E_{2,1,1} + E_{1,1,1} = \frac{9\pi^2 \hbar^2}{8mL^2}$ e con degenerazione $deg = 6$.

(2) Nel caso di bosoni identici la funzione d'onda complessiva dev'essere simmetrica per scambio di particelle.

Il caso dello stato fondamentale rimane invariato. Nel caso del primo stato eccitato la funzione d'onda sarà data da

$$\Psi_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} \psi_{2,1,1}(\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_2) + \psi_{2,1,1}(\vec{x}_2) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1) \\ \psi_{1,2,1}(\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_2) + \psi_{1,2,1}(\vec{x}_2) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1) \\ \psi_{1,1,2}(\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_2) + \psi_{1,1,2}(\vec{x}_2) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1) \end{cases} \quad (8)$$

con autovalore sempre dato da $E_1 = E_{2,1,1} + E_{1,1,1} = \frac{9\pi^2\hbar^2}{8mL^2}$ e con degenerazione $deg = 3$.

(3) Lo spettro di autovalori di energia dell'hamiltoniana è dato da $E_{n_1, n_2, n_3} + E_{m_1, m_2, m_3} + E_s$, dove E_s sono gli autovalori dell'hamiltoniana di spin H_s .

Visto che si suppone che la separazione dei livelli di H_s sia più piccola di quella dei livelli di H_0 , l'aggiunta dello spin non ha alcun effetto sulla degenerazione dello spettro di H_0 che rimane invariata ed è quella della buca di potenziale quadrata, vista alla domanda (1) per i primi due stati, e che non può essere determinata in forma chiusa per il livello generico.

C'è una ulteriore degenerazione dovuta allo spin. Per determinarla, consideriamo la base degli autostati di $\vec{s}^2, s_z, \vec{s}_1^2, \vec{s}_2^2$, dove $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$. Abbiamo che

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \frac{1}{2} (\vec{s}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2). \quad (9)$$

Nel caso di due particelle non identiche di spin $\frac{1}{2}$, lo spettro della hamiltoniana di spin è dato da

$$E_s = \hbar^2 \frac{\lambda}{2} \left(s(s+1) - \frac{3}{2} \right); \quad (10)$$

la degenerazione della parte di spin è $deg = 2s + 1$, ed i valori permessi dello spin totale sono $s = 0, 1$. Pertanto se $s = 0$, $E_s = -\frac{3}{4}\hbar^2$ e $deg = 0$, mentre se $s = 1$, $E_s = \frac{\hbar^2}{4}$ e $deg = 3$.

Nel caso di due particelle non identiche di spin $\frac{1}{2}$ e 1, lo spettro della hamiltoniana di spin è

$$E_s = \frac{\lambda}{2} \left(s(s+1) - \frac{11}{4} \right), \quad (11)$$

la degenerazione della parte di spin è $deg = 2s + 1$, ed i valori permessi dello spin totale sono $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. Pertanto se $s = \frac{1}{2}$, $E_s = -\hbar^2$ e $deg = 2$, mentre se $s = \frac{3}{2}$, $E_s = \frac{1}{4}\hbar^2$ e $deg = 4$.

(4) La probabilità che il sistema preparato al tempo t_0 sia ancora nello stesso autostato al tempo $t > t_0$ $|\psi\rangle$ è il modulo quadro dell'ampiezza $A_{\psi\psi}(t)$ che, in rappresentazione di interazione al primo ordine, è data da

$$A_{\psi\psi}(t) = \langle 0|1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' V'(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t')|0\rangle. \quad (12)$$

Osserviamo ora che le autofunzioni dell'hamiltoniana data hanno tutte parità definita, e quindi

$$\langle \psi|V'(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)|\psi\rangle = 0 \quad (13)$$

per ogni $|\psi\rangle$ e per ogni t perché il valor medio di \vec{x}_i è l'integrale di una funzione dispari su un dominio pari. Ne segue che al primo ordine in \vec{E} il sistema resta nello stato fondamentale con probabilità uno.

(5) Senza perdere generalità si può scegliere il sistema di riferimento in modo che il vettore \vec{B} sia diretto lungo l'asse z ottenendo

$$H_2 = H_0 + \frac{\lambda}{2} \left(\vec{s}^2 - \frac{3}{2} \right) + \mu B_z s_z. \quad (14)$$

Lo spettro può quindi essere determinato esattamente ottenendo

$$E_{n_1, n_2, n_3} + E_{m_1, m_2, m_3} + \frac{\lambda}{2} (s(s+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)) + \mu B_z s_z. \quad (15)$$

Il risultato coincide con quello al prim'ordine perturbativo. La degenerazione viene rimossa completamente.

(6) In questo caso lo spettro non può essere determinato esattamente. Scegliamo sempre il sistema di riferimento in modo che il vettore \vec{B} sia diretto lungo l'asse z e utilizziamo la teoria delle perturbazioni al prim'ordine.

Per il singoletto abbiamo che

$$B_z \mu_2 \langle 0, 0 | (2s_{1z} + s_{2z}) | 0, 0 \rangle = 0. \quad (16)$$

Per il tripletto, nella base

$$|1, s_z\rangle = \begin{pmatrix} |1, 1\rangle \\ |1, -1\rangle \\ |1, 0\rangle \end{pmatrix} \quad (17)$$

abbiamo che

$$B_z \mu_2 \langle 1, s_z | (2s_{1z} + s_{2z}) | 1, s_z \rangle = \frac{B_z \mu_2 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

La degenerazione viene quindi rimossa completamente.