ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

18 Luglio 2017

Traccia di soluzione

(1) Quando $\vec{B}=0$ l'hamiltoniana è proporzionale all'operatore $\vec{L}^2$ pertanto gli autostati sono le autofunzioni del momento angolare $|\ell m\rangle$ con $\ell \geq 0$ intero e $-\ell \leq m \leq \ell$. Gli autovalori sono

$$E_\ell = \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2I}. \tag{1}$$

Poiché non dipendono da m, la degenerazione è pari a $2\ell+1$.

(2) Innanzitutto riscriviamo la hamiltoniana data come

$$H = \frac{1}{2I}\left(\vec{L}^2 + 2\vec{B}\cdot\vec{L} + \vec{B}^2\right) \tag{2}$$

Le equazioni del moto di Heisenberg per gli operatori dati sono quindi

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,\vec{L}] = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2I}\left(\vec{L}^2 + 2\vec{B}\cdot\vec{L}\right),\vec{L}\right] = \frac{1}{I}\vec{B}\times\vec{L} \tag{3}$$

dove abbiamo usato le proprietà $[\vec{L}^2, L_j]=0$ e $[L_j, L_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}L_l$.

(3) Si veda la Sezione (10.1) del testo.

(4) La probabilità è data da

$$P = \left|\langle\phi_2|e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\phi_1\rangle\right|^2 = \left|\langle\phi_2|\frac{e^{-\frac{i}{I}\hbar t}}{\sqrt{2}}\left(e^{-iBt}|1\,1\rangle + e^{iBt}|1\,{-1}\rangle\right)\right|^2 = \left|\frac{e^{iBt}-e^{-iBt}}{2i}\right|^2 = \sin^2(Bt)\,. \tag{4}$$

$|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ sono gli stati $|1\rangle$ e $|2\rangle$ della base cartesiana, infatti da $|1\ \pm 1\rangle = (|1\rangle \pm i|2\rangle)/\sqrt{2}$ si ricava che $|1\rangle = |\phi_1\rangle$ e $|2\rangle = -i|\phi_2\rangle$.

(5) Usando la Eq. (2) vediamo immediatamente che per determinare lo spettro basta scegliere l'asse z coincidente con la direzione di $\vec{B}$. Le autofunzioni sono quindi sempre le autofunzioni del momento angolare, e gli autovalori diventano

$$E_{\ell m} = \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2I} + \frac{1}{I}\hbar m B + \frac{1}{2I}B^2, \tag{5}$$

dove $B = |\vec{B}|$. e non c'è degenerazione.

(6) La hamiltoniana imperturbata è diagonale nella base $|\ell, m\rangle|s, m_s\rangle$ di autostati di $\vec{L}^2, L_z, \vec{s}^2, s_z$. L'interazione spin-orbita data è diagonale nella base in cui è diagonale il momento angolare totale

J^2, ma non è possibile diagonalizzare simultaneamente L_z e J^2, quindi dobbiamo trattare l'interazione perturbativamente, calcolandone l'elemento di matrice negli stati della base$|\ell, m\rangle|s, m_s\rangle$. Ricordando che $\langle \ell, m|L_x|\ell, m\rangle = \langle \ell, m|L_y|\ell, m\rangle = 0$ abbiamo che la correzione al primo ordine allo spettro è data da

$$\Delta E_{\ell m} = \langle \ell, m|\langle s, m_s|\lambda \vec{s} \cdot \vec{L}|\ell, m\rangle|s, m_s\rangle = \langle \ell, m|\lambda s_z L_z|\ell, m\rangle = \hbar^2 \lambda\, m_s m\,. \tag{6}$$

(7) Fissiamo l'asse di rotazione lungo l'asse z. Lo stato del sistema al tempo t nel sistema rotante R è dato da

$$|\psi, t\rangle_R = e^{-\frac{i}{\hbar} L_z \omega t}|\psi, t\rangle \tag{7}$$

in termini dello stato $|\psi, t\rangle$ del sistema a riposo. Pertanto, lo stato $|\psi, t\rangle_R$ soddisfa

$$\begin{aligned} \frac{d|\psi, t\rangle_R}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} L_z \omega |\psi, t\rangle_R + e^{-\frac{i}{\hbar} L_z \omega t} \left(-\frac{i}{\hbar} H|\psi, t\rangle \right) && (8) \\ &= -\frac{i}{\hbar} H_R |\psi, t\rangle_R, && (9) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'equazione di Schrödinger per lo stato $|\psi, t\rangle$ del sistema a riposo, e l'ultimo passaggio ci permette di identificare l'hamiltoniana H_R nel sistema rotante.

Troviamo così

$$H_R = H + L_z \omega \tag{10}$$

che ha gli stessi autostati $|\ell m\rangle$ di H e autovalori

$$E^R_{\ell m} = E_{\ell m} + \hbar m \omega\,, \tag{11}$$

dove $E_{\ell m}$ sono gli autovalori Eq. (5) dell'hamiltoniana nel sistema a riposo.