

# ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

16 luglio 2019

## Traccia di soluzione

(1) Il problema è separabile in tre hamiltoniane unidimensionali per ognuna particella. Siano  $S$  e  $S_z$  rispettivamente lo spin totale e la sua componente lungo  $z$ . Gli autovalori dell'energia si possono quindi scrivere come somma degli autovalori per ciascuna particella

$$E = E_{n_1, n_2, n_3} + E_{m_1, m_2, m_3}$$

e le autofunzioni come prodotto

$$\psi_{n_1, n_2, n_3}(\vec{x}_1) \psi_{m_1, m_2, m_3}(\vec{x}_2) \chi_{s_z^1} \chi_{s_z^2}$$

dove

$$E_{i,j,k} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m} \left( \frac{i^2}{a_1^2} + \frac{j^2}{a_2^2} + \frac{k^2}{a_3^2} \right) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} (4(i^2 + j^2) + k^2),$$

$$\psi_{n,l,m}(\vec{x}) = \psi_{n,a}(x) \psi_{m,b}(y) \psi_{l,c}(z),$$

$$\psi_{n,a}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}} \cos \frac{n\pi}{2a} x, & \text{se } n \text{ dispari} \\ \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{n\pi}{2a} x, & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

e  $\chi_{s_z}$  sono spinori corrispondenti alle due particelle.

(2) In questo caso compare nell'hamiltoniana il termine

$$\frac{\mu}{\hbar} \vec{B} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) = \frac{\mu}{\hbar} |\vec{B}| S_z.$$

L'hamiltoniana continua ad essere separabile e gli autovalori dell'energia rimangono quelli del punto precedente con l'aggiunta di un contributo di spin

$$E_s = \mu |\vec{B}| s_z^1 + \mu |\vec{B}| s_z^2,$$

dove  $\hbar s_z^i$  è l'autovalore di  $S_z$  per la  $i$ -esima particella.

(3) Lo stato fondamentale è non degenere con energia  $2E_{1,1,1}$  e con funzione d'onda

$$\psi = \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_2) \chi_{0,0},$$

dove ora  $\chi_{s,s_z}$  è lo spinore per il sistema di due particelle, dipendente dallo spin totale  $s$  e dalla sua terza componente  $s_z$ , e quindi  $\chi_{0,0}$  corrisponde allo stato di singoletto (antisimmetrico). La parte spaziale è simmetrica, dimodoché la funzione d'onda totale è antisimmetrica.

Il primo stato eccitato ha energia  $E_{1,1,1} + E_{1,1,2}$ , oppure  $E_{1,1,1} + E_{1,2,1}$ , oppure  $E_{1,1,1} + E_{2,1,1}$  e può essere scelto in ciascuno dei tre casi con funzione d'onda spaziale simmetrica e

di spin antisimmetrica  $\psi_1^+(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\chi_{0,0}$ , oppure spaziale antisimmetrica e di spin simmetrica  $\psi_1^-(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\chi_{1,s_z}$ , dove nel primo caso

$$\psi_1^\pm(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{1,1,1}(\vec{x}_1)\psi_{1,1,2}(\vec{x}_2) \pm \psi_{1,1,2}(\vec{x}_1)\psi_{1,1,1}(\vec{x}_2)),$$

e negli altri due casi  $\psi_{1,1,2}(\vec{x})$  è sostituita rispettivamente da  $\psi_{1,2,1}(\vec{x})$  o da  $\psi_{2,1,1}(\vec{x})$ . Lo stato ha quindi una degenerazione di ordine quattro, dovuta alla possibilità di scegliere le due combinazioni simmetrica ed antisimmetrica visto che la funzione d'onda di spin simmetrica ammette tre possibili valori di  $s_z$  (tripletto), vuole un'ulteriore degenerazione di ordine tre dovuta alla possibilità di scegliere lungo quale delle direzioni vi è l'eccitazione. Quindi la degenerazione totale è 12.

(4) Lo stato fondamentale ha gli stessi autovalori e autofunzioni del caso precedente per via della relazione  $\mu|\vec{B}| \ll E_0$ . Il primo stato eccitato ha degenerazione 3, in quanto lo stato avente  $s_z = -1$  ha ora energia minore degli altri stati di spin. L'energia è  $E_{1,1,1} + E_{1,1,2} - \mu|\vec{B}|$  e la funzione d'onda  $\psi_1^-(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\chi_{1,-1}$ , con la possibilità di scegliere lungo quale delle tre direzioni è l'eccitazione.

(5) Come si è visto alla domanda precedente, lo stato fondamentale e lo stato eccitato sono autostati dello spin totale. La misura di spin darà quindi come risultato il corrispondente autovalore con probabilità 1, e cioè  $S_z = 0$  per lo stato fondamentale e  $S_z = -\hbar$  per il primo stato eccitato.

(6) Si veda ad esempio il libro di testo (Sez.14.1).

(7) Le equazioni del moto di Heisenberg sono:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S_z &= -\frac{i}{\hbar}[S_z, H] = 0, & \frac{d}{dt}S_x &= -\frac{i}{\hbar}[S_x, H] = -\frac{\mu}{\hbar}|\vec{B}|S_y, & \frac{d}{dt}S_y &= -\frac{i}{\hbar}[S_y, H] = \frac{\mu}{\hbar}|\vec{B}|S_x, \\ \frac{d}{dt}x_i^{(j)} &= -\frac{i}{\hbar}[x_i^{(j)}, H] = -\frac{i}{2m\hbar}[x_i^{(j)}, p_i^2] = \frac{1}{m}p_i^{(j)} \\ \frac{d}{dt}p_i^{(j)} &= -\frac{i}{\hbar}[p_i^{(j)}, H] = -\frac{i}{\hbar}[p_i^{(j)}, V(\vec{x}_i)] = -V_0 [\delta(x^{(j)} - a_j) + \delta(x^{(j)} + a_j)] \end{aligned}$$

dove è stato tenuto conto della discontinuità del potenziale ad  $x^{(i)} = \pm a_i$ .

(8) La funzione d'onda a  $t = 0$  è data da

$$\psi(0) = \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1)\psi_{1,1,1}(\vec{x}_2)\chi_{1,1},$$

mentre la funzione d'onda dello stato fondamentale della domanda (2) è data da

$$\psi^f = \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1)\psi_{1,1,1}(\vec{x}_2)\chi_{1,-1}.$$

L'evoluzione dell'hamiltoniana spaziale produce un fattore di fase che non influisce sulla probabilità. L'evoluzione temporale della hamiltoniana di spin produce invece la nota precessione dello spin

$$\langle i|e^{-\frac{i}{\hbar}\mu\vec{B}|S_x t}|1, -1\rangle_{s,s_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\mu}{\hbar}|\vec{B}|t & \sin \frac{\mu}{\hbar}|\vec{B}|t \\ 0 & -\sin \frac{\mu}{\hbar}|\vec{B}|t & \cos \frac{\mu}{\hbar}|\vec{B}|t \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

dove abbiamo usato la base canonica  $|i\rangle$ . La probabilità richiesta è quindi data da

$$P = | {}_{s,s_z}\langle 1, 1 | e^{-\frac{i}{\hbar} \mu |\vec{B}| S_x t} | 1, -1 \rangle_{s,s_z} |^2 = \frac{1}{4} \left( 1 - \cos \frac{\mu}{\hbar} |\vec{B}| t \right)^2 .$$

(9) Si deve calcolare il seguente elemento di matrice

$$\Delta_E = \langle E_0 | \lambda \delta^{(3)}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) | E_0 \rangle .$$

Usando la base delle coordinate si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta_E &= \lambda \int d^3 \vec{x}_1 d^3 \vec{x}_2 \psi_{1,1,1}^*(\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}^*(\vec{x}_2) \delta^{(3)}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_2) \\ &= \lambda \int d^3 \vec{x}_1 \psi_{1,1,1}^*(\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}^*(-\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}(-\vec{x}_1) \\ &= \lambda \int d^3 \vec{x}_1 \psi_{1,1,1}^*(\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}^*(\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1) \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1) = \lambda \int d^3 \vec{x}_1 |\psi_{1,1,1}(\vec{x}_1)|^4 . \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che l'autofunzione  $\psi_{1,1,1}(\vec{x})$  ha parità definita .