Esame scritto di meccanica quantistica
traccia di soluzione

11 Luglio 2013

Esercizio 1. L'Hamiltoniana può essere scritta come

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left\{ \vec{p}^2 + \vec{A}^2(\vec{x}) - \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{x}) - \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{p} \right\}. \tag{1}$$

La componente i-esima dell'operatore velocità $\vec{v}$ è

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [x_i, H_0] = \frac{p_i - A_i(\vec{x})}{m}. \tag{2}$$

Calcoliamo il commutatore

$$[v_i, v_j] = \frac{1}{m^2} [p_i - A_i(\vec{x}), p_j - A_j(\vec{x})] = \frac{1}{m^2} \left(-[p_i, A_j(\vec{x})] - [A_i(\vec{x}), p_j] \right) \tag{3}$$

$$= \frac{i\hbar}{m^2} \left(\partial_i A_j(\vec{x}) - \partial_j A_i(\vec{x}) \right) = \frac{i\hbar}{m^2} \epsilon^{ijk} B_k. \tag{4}$$

Esercizio 2. L'equazione del moto per $v_i$si ottiene facilmente osservando che la Eq. (2) implica

$$H = \frac{m}{2} \vec{v}^2, \tag{5}$$

da cui

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [v_i, H_0] = -\frac{im}{2\hbar} [v_i, v_j v_j] = \frac{1}{2m} \left\{ \left(\partial_i A_j(\vec{x}) - \partial_j A_i(\vec{x}) \right) v_j + v_j \left(\partial_i A_j(\vec{x}) - \partial_j A_i(\vec{x}) \right) \right\}. \tag{6}$$

Esercizio 3. Sviluppando l'Hamiltoniana otteniamo

$$H_\perp = \frac{1}{2m} \left\{ p_x^2 + p_y^2 + \frac{B^2}{4} \left(x^2 + y^2 \right) - B \left(x p_y - y p_x \right) \right\}, \tag{7}$$

che in termini di $L_z = x p_y - y p_x$ e $\omega = B/2m$ è uguale a

$$H_\perp = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) - \omega L_z. \tag{8}$$

I primi quattro termini a membro destro corrispondono alla hamiltoniana di un oscillatore armonico bidimensionale isotropo. Lo spettro di $H_\perp$ è dunque

$$E_{n_x, n_y, l_z} = \hbar \omega \left(n_x + n_y + 1 \right) - \omega \hbar l_z, \tag{9}$$

dove n_i sono interi non negativi, e l_z è un numero intero qualunque (l'autovalore della terza componente del momento angolare lungo un asse qualunque può essere un qualunque intero). Possiamo quindi riscrivere lo spettro come

$$E_N = \hbar\omega N, \tag{10}$$

dove

$$N = n_x + n_y - l_z + 1 \tag{11}$$

è un intero qualunque.

La degenerazione dello spettro è manifestamente infinita, in quanto vi sono infiniti modi di scrivere un numero intero come somma di altri numeri interi di cui almeno uno possa essere negativo.

Esercizio 4. Scriviamo H_S in termini di matrici di Pauli:

$$H_S = -\frac{B}{m} S_z = \frac{\hbar B}{2m} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Scriviamo inoltre l'operatore b usando le matrici di Pauli

$$b = \frac{1}{\hbar}\left(S_y - iS_x\right) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Ne segue che

$$b^\dagger b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

e

$$b^\dagger b - \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

da cui

$$H_S = \hbar\omega\left(b^\dagger b - \frac{1}{2}\right). \tag{16}$$

Esercizio 5. Verifichiamo le proprietà:

$$b^\dagger b + b b^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1; \tag{17}$$

analogamente

$$b^2 = \left(b^\dagger\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Utlizzando queste proprietà, vediamo immediatamente che dato uno stato $|\psi\rangle$ qualunque si ha che, detto $N \equiv b^\dagger b$,

$$N b|\psi\rangle = 0 \tag{19}$$

(dalla Eq. (18), mentre

$$N b^\dagger|\psi\rangle = b^\dagger|\psi\rangle \tag{20}$$

(dall Eq. (17).

Ne segue che gli autovalori di $N = b^\dagger b$ sono 0, 1 (come si vede anche eplicitamente dalla rappresentazione Eq. (14) e quindi gli autovalori di H_s sono $\pm\frac{1}{2}$. Ricordando la Eq. (11), lo spettro dell'Hamiltoniana $H = H_\perp + H_S$ è quindi

$$E_N^\pm = \hbar\omega\left(N \pm \frac{1}{2}\right). \tag{21}$$

Esercizio 6. Le equazioni del moto per le tre componenti dell'operatore velocità sono

$$\frac{dv_x}{dt} = 2\omega v_y, \tag{22}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -2\omega v_x, \tag{23}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0. \tag{24}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_x(0)\cos 2\omega t + v_y(0)\sin 2\omega t, && (25)\\ v_y(t) &= v_y(0)\cos 2\omega t - v_x(0)\sin 2\omega t, && (26)\\ v_z(t) &= v_z(0), && (27) \end{aligned}$$

dove $v_i(0)$ sono gli operatori alla Schrödinger.

Con la forma data di $\vec{A}$, le componenti x e y di $\vec{v}$ non commutano tra loro, mentre commutano entrambe con la componente z. Pertanto, il sistema al tempo iniziale può trovarsi in un autostato simultaneo di v_x e v_z. L'autovalore di v_z è una costante del moto. Ai tempi t successivi invece il sistema non é più in generale in un autostato di $v_x(t)$, eccetto ai tempi $t = \pi n/\omega$ per i quali gli operatori v_x e v_y sono gli stessi che al tempo iniziale.

Esercizio 7. Verifichiamo che x_c e y_c sono costanti del moto:

$$\frac{dx_c}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2\omega}\frac{dv_y}{dt} = v_x - \frac{1}{2\omega}2\omega v_x = 0, \tag{28}$$

$$\frac{dy_c}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{1}{2\omega}\frac{dv_x}{dt} = v_y - \frac{1}{2\omega}2\omega v_y = 0. \tag{29}$$

Nel limite semiclassico, possiamo consideriare i valori medi degli operatori dati come proprietà della traiettoria semi-classica seguita in media dal sistema. In tal caso, identifichiamo i valori medi conservati con il centro dell'orbita di una particella carica che ruota in un campo magnetico costante.