ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

25 Settembre 2015

Traccia di soluzione

(1) Si tratta della hamiltoniana di oscillatore armonico bidimensionale, scritta in termini di operatori di creazione e distruzione. Lo spettro è dato da

$$E_0 = \hbar\left(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2\right) \,. \tag{1}$$

La degenerazione è nulla se $\omega_1 \neq \omega_2$ (e sono incommensurabili), mentre è pari a $n+1$ se $\omega_1 = \omega_2$ (oscillatore armonico bidimensionale isotropo)/.

(2) Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned}
\frac{dN_{11}}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[H, N_{11}] = 0\,, \\
\frac{dN_{12}}{dt} &= i\omega_1[a_1^\dagger a_1, a_1^\dagger a_2] + i\omega_2[a_2^\dagger a_2, a_1^\dagger a_2] = i\left(\omega_1-\omega_2\right) a_1^\dagger a_2 = i\left(\omega_1-\omega_2\right) N_{12}\,, \\
\frac{dN_{21}}{dt} &= i\omega_1[a_1^\dagger a_1, a_2^\dagger a_1] + i\omega_2[a_2^\dagger a_2, a_2^\dagger a_1] = -i\left(\omega_1-\omega_2\right) a_2^\dagger a_1 = -i\left(\omega_1-\omega_2\right) N_{21}\,, \\
\frac{dN_{22}}{dt} &= 0\,,
\end{aligned} \tag{2}$$

la cui soluzione è data da

$$\begin{aligned}
N_{11}(t) &= N_{11}(0)\,, \\
N_{12}(t) &= N_{12}(0)e^{i(\omega_1-\omega_2)t}\,, \\
N_{21}(t) &= N_{21}(0)e^{i(\omega_2-\omega_1)t}\,, \\
N_{22}(t) &= N_{22}(0)\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Quando $\omega_1 = \omega_2$ gli operatori commutano tutti con la hamiltoniana (cfr. Eq. (2)) e sono quindi costanti del moto (cfr. Eq.(3)).

(3) Abbiamo che (con la convenzione che indici ripetuti sono sommati)

$$[j_a, j_b] = [a_i^\dagger \sigma^a_{ij} a_j, a_k^\dagger \sigma^b_{kl} a_l] = a_i^\dagger[\sigma^a_{ij} a_j, a_k^\dagger \sigma^b_{kl}]a_l + a_k^\dagger[a_i^\dagger \sigma^a_{ij}, \sigma^b_{kl} a_l]a_j = a_i^\dagger\left[\sigma^a, \sigma^b\right]_{ij} a_j = i\hbar\,\varepsilon^{abc} j_c\,. \tag{4}$$

Si tratta delle relazioni di commutazione degli operatori di momento angolare. Quando $\omega_1 = \omega_2$ questi operatori commutano tutti con l'hamiltoniana, perché sono combinazioni lineari degli operatori N_{ij} che in tal caso commutano con l'hamiltoniana come si è visto al punto precedente. Tuttavia, gli operatori j_a soddisfano alle relazioni di commutazione Eq. (4) che sono uguali a quelle degli operatori di momento angolare. Quindi qualunque dei tre operatori j_a può essere diagonalizzato simultaneamente all'hamiltoniana, ma i restanti due operatori j_a non possono essere diagonalizzati simultaneamente.

(4) Poiché gli operatori j_a soddisfano relazioni di commutazione tipo momento angolare, qualunque

di essi può essere interpretato come terza componente di un momento angolare. Il suo spettro è dato perciò da interi e semi-interi (in unità di $\hbar$). Per capire se tutti questi valori sono fisicamente ammissibili, quando $\omega = \omega_1 = \omega_2$, poniamo $a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x_i + \frac{i}{m\omega}\, p_i)$. Abbiamo che

$$j_2 = a_i^\dagger \sigma_{ij}^{(2)} a_j = -i\frac{\hbar}{2}\left(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1\right) = \cdots = \frac{1}{2}(x_1 p_2 - x_2 p_1) = \frac{1}{2}L\,. \tag{5}$$

Ma L è l'operatore momento angolare orbitale, che genera le rotazioni nel piano in cui si trova l'oscillatore armonico bidimensionale, ed ammette solo autovalori interi. Lo spettro di j_2 è uguale allo spettro di $L/2$ ed ammette quindi valori semi-interi.

(5) La correzione al primo ordine all'energia dello stato fondamentale $|0\rangle = |n_1 = 0, n_2 = 0\rangle$ è data da

$$E_1 = \langle 0|H_1|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\sqrt{\omega_1\omega_2}}\langle 0|(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger + a_1 a_2)|0\rangle = 0\,. \tag{6}$$

La correzione al second'ordine è data da

$$E_2 = \lambda^2 \sum_{m\neq 0} \frac{|\langle m|H_1|0\rangle|^2}{E_0^{(0)} - E_0^{(m)}} = \frac{\hbar^2\lambda^2}{4m^2\omega_1\omega_2}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{E_0^{(0)} - E_0^{(m)}}\langle m|a_1^\dagger a_2^\dagger|0\rangle\langle 0|a_1 a_2|m\rangle = \frac{-\hbar\lambda^2}{4m^2\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2)}\,. \tag{7}$$

(6) Scrivendo H in termini degli operatori x_i e p_i otteniamo

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2}{2}x_1^2 + \frac{m\omega_2^2}{2}x_2^2 + \lambda x_1 x_2\,, \tag{8}$$

$$= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + x_i V_{ij} x_j, \tag{9}$$

dove

$$V = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} m\omega_1^2 & \lambda \\ \lambda & m\omega_2^2 \end{pmatrix}\,. \tag{10}$$

Ma V Eq. (10) è una matrice simmetrica, e può quindi essere diagonalizzata mediante una rotazione $X_i = M_{ij}x_j$, dove M è una matrice ortogonale. Gli impulsi canonicamente coniugati sono $P_i = M_{ij}p_j$ Nelle nuove coordinate X_i, P_i il potenziale è diagonale e l'hamiltoniana può quindi essere scritta come

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + \frac{m\Omega_1^2}{2}X_1^2 + \frac{m\Omega_2^2}{2}X_2^2 = \hbar\,\Omega_1 A_1^\dagger A_1 + \hbar\,\Omega_2 A_2^\dagger A_2\,, \tag{11}$$

dove A_i, $A_i^\dagger$ sono gli operatori di creazione e distruzione definiti nel modo consueto a partyire dalle nuove coordinate X_i, P_i.

(7) I valori di Ω_i si possono ottenere calcolando gli autovalori della matrice del potenziale Eq. (12). Essi sono

$$\frac{m}{2}\Omega_{1,2}^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2 + 4\lambda^2/m^2}\right)\,. \tag{12}$$

Lo spettro di H esatto è quindi

$$E = \hbar\Omega_1\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_2\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\,. \tag{13}$$

Ponendo $n_1 = n_2 = 0$ e sviluppando fino al primo ordine in λ^2 si ritrova la correzione allo stato fondamentale data dalla Eq. (7).