Esame Scritto di Meccanica Quantistica
Traccia di soluzione

7 Settembre 2017

1. I commutatori sono dati da

$$[H_0, x_i] = \frac{1}{2m}\left[p_j p^j - \left(A_j p^j + p_j A^j\right) + A_j A^j, x_i\right] = -\frac{i\hbar}{m}(p_i - A_i) \tag{1}$$

$$\begin{aligned}[H_0, p_i] &= \frac{1}{2m}\left[p_j p^j - \left(A_j p^j + p_j A^j\right) + A_j A^j, p_i\right] \\ &= -\frac{i\hbar}{2m}\left[(p_j - A_j)\frac{\partial A^j}{\partial x_i} + \frac{\partial A^j}{\partial x_i}(p_j - A_j)\right] = -\frac{i\hbar}{m}(p_j - A_j)\frac{\partial A^j}{\partial x_i}\end{aligned} \tag{2}$$

dove l'ultimo passaggio nella Eq. (2) non è vero in generale ma vale per la forma di $\vec{A}$ data qui.

Calcolando esplicitamente le derivate del potenziale abbiamo, per le singole componenti,

$$[H_0, x_1] = -\frac{i\hbar}{m}\left(p_1 + \frac{B}{2}x_2\right), \qquad [H_0, p_1] = -\frac{i\hbar B}{2m}\left(p_2 - \frac{B}{2}x_1\right), \tag{3}$$

$$[H_0, x_2] = -\frac{i\hbar}{m}\left(p_2 - \frac{B}{2}x_1\right), \qquad [H_0, p_2] = \frac{i\hbar B}{2m}\left(p_1 + \frac{B}{2}x_2\right), \tag{4}$$

$$[H_0, x_3] = -\frac{i\hbar}{m}p_3, \qquad [H_0, p_3] = 0. \tag{5}$$

2. Dati i commutatori calcolati al punto precedente e l'equazione di Heinsemberg

$$\frac{dS}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, S] \tag{6}$$

otteniamo le seguenti equazioni del moto:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{m}\left(p_1 + \frac{B}{2}x_2\right), \qquad \frac{dp_1}{dt} = \frac{B}{2m}\left(p_2 - \frac{B}{2}x_1\right), \tag{7}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{m}\left(p_2 - \frac{B}{2}x_1\right), \qquad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{B}{2m}\left(p_1 + \frac{B}{2}x_2\right), \tag{8}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{p_3}{m}, \qquad \frac{dp_3}{dt} = 0. \tag{9}$$

L'equazione relativa alla terza componente (x_3) è l'equazione del moto per una particella libera, che ha come soluzione

$$x_3 = x_3^{(0)} + \frac{1}{m}p_3^{(0)}t \qquad p_3 = p_3^{(0)} = \hbar k_3, \tag{10}$$

dove $p_3^{(0)}$ e $x_3^{(0)}$ sono rispettivamente gli operatori impulso e posizione al tempo $t = 0$.

3. Sviluppando il quadrato la hamiltoniana data prende la forma

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{B^2}{8m}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \frac{B}{2m}(x_1 p_2 - x_2 p_1) + \frac{p_3^2}{2m}. \tag{11}$$

Separandola come suggerito essa prende la forma

$$H_0 = H_{12}(x_1, x_2, p_1, p_2) + H_3(x_3, p_3)\,; \tag{12}$$

$$H_{12}(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{B^2}{8m}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \frac{B}{2m}(x_1 p_2 - x_2 p_1)\,, \tag{13}$$

$$H_3(x_3, p_3) = \frac{p_3^2}{2m}. \tag{14}$$

Vediamo immediatamente che H_3 è una hamiltoniana di particella libera, come ci aspettiamo dal punto precedente, mentre H_{12} può essere scritta come

$$\begin{aligned} H_{12}(x_1, x_2, p_1, p_2) &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{x}^2 - \omega L_z \\ &= H_{\mathrm{osc}}(\omega) - \omega L_z, \end{aligned} \tag{15}$$

dove $\vec{x}$ e $\vec{p}$ sono vettori bidimensionali di operatori nel piano (x_1, x_2),

$$\omega = \frac{B}{2m}, \tag{16}$$

mentre

$$L_z = x_1 p_2 - x_2 p_1 \tag{17}$$

è la terza componente del momento angolare orbitale, e H_{osc} è una hamiltoniana di oscillatore armonico bidimensionale isotropo con pulsazione ω.

Osservando che

$$[H_{\mathrm{osc}}, L_z] = 0 \tag{18}$$

gli autostati di H_{12} possono essere scelti come autostati simultanei di oscillatore armonico bidimensionale, etichettati da un numero quantico n, e della terza componente del momento angolare, etichettati da m. Gli autovalori di H_3 hanno spettro continuo etichettato da k_3. Lo spettro di autovalori di energia è quindi

$$E_{n,m,k_3} = \hbar\omega\,(n + 1 - m) + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2m} \tag{19}$$

con n ed m interi.

4. *Domanda di Teoria:* La dimostrazione è contenuta nella sezione 10.3.1 del testo, in particolare Eqs. (10.35-10.45).

5. Le relazioni di commutazione tra le p e le x sono lasciate invariate dalla trasformazione: l'aggiunta di una qualunque funzione delle x alle p non cambia il commutatore visto che le x commutano fra loro. Le relazioni di commutazione delle x fra loro sono banalmente invariate visto che la trasformazione non cambia le x. Basta quindi verificare che le p' commutano fra loro. I commutatori con p_3 sono invariati visto che la trasformazione di p_1 e p_2 non dipende da x_3. Resta quindi da verificare il commutatore tra p'_1 e p'_2. Si ha

$$\left[p'_1, p'_2\right] = \frac{B}{2}\left([p_1, x_1] + [x_2, p_2]\right) = 0 \tag{20}$$

e quindi tutte le relazioni di commutazione sono canoniche.

Nelle nuove coordinate la hamiltoniana diventa

$$H'_0 = \frac{\left(p'_1 - \frac{B}{2}x_2 + \frac{B}{2}x_2\right)^2}{2m} + \frac{\left(p'_2 - \frac{B}{2}x_1 - \frac{B}{2}x_1\right)^2}{2m} + \frac{(p'_3)^2}{2m} = \frac{(p'_1)^2}{2m} + \frac{(p'_2 - Bx_1)^2}{2m} + \frac{(p'_3)^2}{2m}. \tag{21}$$

La hamiltoniana Eq. (21) commuta con p_2' e p_3' e quindi può essere diagonalizzata insieme a questi operatori. Ma su un autostato di p_2' e p_3' la hamiltoniana H_0' è, a meno di una costante additiva, una hamiltoniana di oscillatore armonico unidimensionale lungo l'asse x_1' avente pulsazione 2ω. Lo spettro è quindi

$$E_{N,k_2,k_3} = 2\hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2m}, \tag{22}$$

indipendente da k_2.

È interessante osservare (non richiesto) che lo spettro Eq. (22) coincide con quello Eq.(19), come ci si aspetterebbe visto che si tratta della stessa hamiltoniana scritta in termini di diverse coordinate canoniche. Per dimostrarlo occorre osservare che un'autofunzione di oscillatore armonico bidimensionale isotropo associata al numero quantico n, nella base in cui J_z è diagonale (ossia scritta in coordinate polari), ammette valori di m aventi la stessa parità di n. Ne segue che in realtà nella Eq. (19) solo i valori di m pari (dispari) sono ammessi quando n è pari (dispari), e quindi $n - m$ assume solo valori pari, e quindi lo spettro ha la forma Eq. (22) con N intero qualunque. (Viene considerata corretta la soluzione del punto 3 anche se non si fa notare che $n - m$ deve essere pari).

6. *Nota: nel testo distribuito per un refuso la perturbazione era diretta lungo l'asse x_2. In tal caso la perturbazione al primo ordine è nulla e il problema non è esattamente risolubile. Viene dato punteggio pieno sia a chi ha risolto il problema come assegnato, sia a chi ha corretto il refuso.*

   La correzione al primo ordine perturbativo in $\mathcal{E}$ agli autovalori di energia di H_0' è

$$E^{(1)}_{n,k_2,k_3} = \mathcal{E} \langle n, k_2, k_3 | \, x_1 \, | n, k_2, k_3 \rangle \,, \tag{23}$$

   dove $|n, k_2, k_3\rangle$ è l'autostato della hamiltoniana di oscillatore armonico unidimensionale $\langle k_2 k_3 | H_0' | k_2 k_3 \rangle$ associato all'autovalore E_{N,k_2,k_3}. Ma le autofunzioni di oscillatore armonico centrato nell'origine hanno tutte $\langle x \rangle = 0$, e quindi le autofunzioni di oscillatore armonico centrato in $x = a$ hanno tutte $\langle x \rangle = a$. Pertanto

$$\mathcal{E} \langle n, k_2, k_3 | \, x_1 \, | n, k_2, k_3 \rangle = -\mathcal{E} \frac{\hbar k_2}{B}, \tag{24}$$

   D'altra parte, il termine in $\mathcal{E}$ può essere riassorbito in un'ulteriore traslazione dell'oscillatore:

$$\begin{aligned} H &= \frac{(p_1')^2}{2m} + \frac{B^2}{2m} \left((x_1')^2 + \frac{2}{B} x_1' p_2' \right) + \frac{(p_2')^2}{2m} + \frac{(p_3')^2}{2m} + \mathcal{E} x_2 \\ &= \frac{(p_1')^2}{2m} + \frac{1}{2} m (2\omega)^2 \left(x_1' + \frac{1}{B} \left(p_2' + \frac{\mathcal{E} m}{B} \right) \right)^2 + \frac{(p_3')^2}{2m} - \frac{\mathcal{E} p_2}{B} - \frac{m \mathcal{E}^2}{2B^2}. \end{aligned} \tag{25}$$

   Lo spettro esatto è quindi

$$E_{n,k_2,k_3} = 2\hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2m} - \frac{\mathcal{E} \hbar k_2}{B} - \frac{m \mathcal{E}^2}{2B^2}, \tag{26}$$

   che se sviluppato al primo ordine in $\mathcal{E}$ coincide con il risultato perturbativo.

7. Dimostriamo il risultato per costruzione esplicita. Imponiamo cioè che data un'autofunzione di H_0

$$H_0 \psi_i (\vec{x}) = E_i \psi_i (\vec{x}) \,, \tag{27}$$

   esista un'autofunzione di H_0'

$$H_0' \psi_i' (\vec{x}) = \frac{1}{2m} \left(\vec{p}' - \vec{A} (\vec{x}) \right)^2 \psi_i' (\vec{x}) \tag{28}$$

con $\psi_i'(\vec{x})$ data dalla Eq. (8) del testo.

Ma osserviamo immediatamente che la Eq. (28) è soddisfatta se

$$p_j' e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda}\psi_i(\vec{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda} p_j \psi_i(\vec{x}) \tag{29}$$

che scritta in componenti corrisponde all'insieme di equazioni

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} = \frac{B}{2} x_2 \tag{30}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} = \frac{B}{2} x_1 \tag{31}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = 0. \tag{32}$$

La soluzione è immediata:

$$\Lambda = \frac{B}{2} x_1 x_2. \tag{33}$$