ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

19 settembre 2019

Traccia della soluzione

(1) L'hamiltoniana è data (a meno di una costante additiva) dalla somma di due hamiltoniane di oscillatori armonici unidimensionali. Lo spettro sarà pertanto dato da

$$E_0^{(n)} = \hbar\omega n = \hbar\omega(n_1 + n_2)\,,$$

con degenerazione $g = n + 1$.

(2) Usando le note proprietà dei commutatori e delle matrici di Pauli abbiamo che (usando la convenzione per cui gli indici ripetuti sono sommati)

$$\begin{aligned}
[j_a, j_b] &= \frac{\hbar^2}{4}[a_i^\dagger \sigma^a_{ij} a_j, a_k^\dagger \sigma^b_{kl} a_l] = \frac{\hbar^2}{4}\left(a_i^\dagger[\sigma^a_{ij} a_j, a_k^\dagger \sigma^b_{kl}]a_l + a_k^\dagger[a_i^\dagger \sigma^a_{ij}, \sigma^b_{kl} a_l]a_j\right) \\
&= \frac{\hbar^2}{4} a_i^\dagger \left[\sigma^a, \sigma^b\right]_{ij} a_j = i\hbar\,\varepsilon^{abc} j_c\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

(3) Al punto precedente abbiamo dimostrato che gli operatori j^a non commutano fra loro, in quanto soddisfano le relazioni di commutazione degli operatori di momento angolare. Pertanto questi operatori non possono essere diagonalizzati simultaneamente.

Per quanto riguarda le relazioni di commutazione con la hamiltoniana, è facile vedere che gli operatori $a_j^\dagger a_k$ commutano tutti con una hamiltoniana della forma

$$H = \sum_{i=1}^N a_i^\dagger a_i, \tag{2}$$

per ogni scelta di $1 \leq j,\ k \leq N$ e per ogni valore di N. Il calcolo esplicito è dato nel libro di testo, Eq. (11.89).

Ne segue quindi che anche gli operatori j^i, che sono combinazioni lineari di tali operatori, commutano tutti con la hamiltoniana:

$$[H, j^i] = 0. \tag{3}$$

Petranto, qualunque dei tre operatori j^a può essere diagonalizzato simultaneamente all'hamiltoniana, ma i restanti due operatori j^a non possono essere diagonalizzati simultaneamente.

(4) Nella base suggerita gli autostati di H_0 sono $|n_1, n_2\rangle$. L'operatore j^3 è dato da $j^3 = \frac{\hbar}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2)$ il cui spettro è $\frac{\hbar}{2}(n_1 - n_2)\,.$

(5) Si veda ad esempio il libro di testo (Sez. 11.2.4).

(6) Il primo stato eccitato è due volte degenere e la perturbazione è diagonale nel sottospazio degenere $\{|1,0\rangle, |0,1\rangle\}$ scegliendo la combinazione di autostati $|\pm\rangle = (|1,0\rangle \pm |0,1\rangle)/\sqrt{2}$. La correzione all'autovalore è pertanto data da

$$E_1^{\pm} = \langle\pm|V|\pm\rangle = \hbar\lambda\langle\pm|(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)|\pm\rangle = \pm\hbar\lambda\,, \tag{4}$$

e la degenerazione è rimossa.

(7) Le condizioni date permettono di determinare che lo stato al tempo $t=0$ è lo stato $|1,0\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$. Il problema può essere risolto in due modi equivalenti (si veda il complemento 32, pag. 212 del testo).

Seguendo il suggerimento, la hamiltoniana H può essere scritta come

$$H = H_0 + 2\lambda j^1\,, \tag{5}$$

da cui si ottiene

$$|\psi,t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(H_0+2\lambda j^1)t}|1,0\rangle = e^{-i\omega t}\left(\cos(\lambda t)|1,0\rangle - i\sin(\lambda t)|0,1\rangle\right) \tag{6}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che l'esponenziale della matrice di Pauli σ^1 applicata all'autostato di σ^3 è

$$e^{-\frac{i}{\hbar}2\lambda j^1 t}|1,0\rangle = \begin{pmatrix} \cos\lambda t & -i\sin\lambda t \\ -i\sin\lambda t & \cos\lambda t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda t \\ -i\sin\lambda \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Alternativamente, si può applicare direttamente l'operatore di evoluzione temporale allo stato iniziale, ottenendo

$$|\psi,t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} = e^{-i\omega t}\frac{e^{-i\lambda t}|+\rangle + e^{i\lambda t}|-\rangle}{\sqrt{2}} = e^{-i\omega t}\left(\cos(\lambda t)|1,0\rangle - i\sin(\lambda t)|0,1\rangle\right)\,. \tag{8}$$

La probabilità richiesta è quindi data da

$$P = |\langle 0,1|\psi,t\rangle|^2 = \sin^2(\lambda t)\,. \tag{9}$$

(8) Sfruttando la relazione $H = H_0 + 2\lambda j^1$ si trova che lo spettro è dato da $\hbar\omega(n_1+n_2) \pm \hbar\lambda$. Si vede quindi che il risultato perturbativo al primo ordine per il primo stato eccitato coincide con il risultato esatto.

(9) Imponiamo la condizione

$$H = \hbar\Omega_1 A_1^\dagger A_1 + \hbar\Omega_2 A_2^\dagger A_2 = R\left(\hbar\Omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\Omega_2 a_2^\dagger a_2\right)R^{-1} \tag{10}$$

$$= \hbar\omega(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) + \hbar\lambda(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) = \hbar a_i^\dagger M_{ij} a_j\,. \tag{11}$$

È pertanto sufficiente diagonalizzare la matrice

$$M = \hbar\begin{pmatrix} \omega & \lambda \\ \lambda & \omega \end{pmatrix} \tag{12}$$

che ha autovalori $\Omega_{1,2} = \hbar(\omega \pm \lambda)$.

Il calcolo degli autovettori permette di determinare la matrice unitaria R di cambio base che diagonalizza H

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \exp\left(i\sigma_2 \frac{\pi}{2} \right) , \tag{13}$$

da cui si ricava

$$\theta = \frac{\pi}{4}; \qquad J = \sigma_2. \tag{14}$$

Il risultato si può anche ottenere senza fare alcun calcolo, con le seguenti osservazioni. Se $A_i^\dagger$, A_i sono operatori di creazione e distruzione, la hamiltoniana prende la forma $\sum_i A_i^\dagger A_i$ ed è diagonale simultaneamente ai due operatori $A_i^\dagger A_i$, con $i = 1,\ 2$. Ne segue che sono simultaneamente diagonali H e $J^3 = \frac{\hbar}{2} \sum_{i,j=1}^{2} a_i^\dagger \sigma_{ij}^3 a_j$. Ma scrivendo la hamiltoniana nella forma Eq. (6) del tema d'esame sono simultaneamente diagonali H e j^2. Quindi la trasformazione richiesta è quella che trasforma j^2 in J^3, ossia una rotazione di 90 gradi attorno all'asse x, che trasforma l'asse y nell'asse z. Ricordando che $\frac{\sigma^i}{2}$ genera le rotazioni attorno all i-esimo asse si ritrova il risultato Eq. (14).