

PROBLEMI DI FISICA MODERNA E MECCANICA QUANTISTICA

SECONDA PARTE

anno accademico 2016-2017

- (1) Per un sistema meccanico n -dimensionale scrivere: (a) gli elementi di matrice dello operatore posizione \vec{x} e dell'operatore impulso \vec{p} tra autostati della posizione $|\vec{x}\rangle$; (b) le autofunzioni dell'operatore impulso nella base degli autostati della posizione $\langle\vec{x}|\vec{k}\rangle$; (c) la relazione tra le espressioni di un vettore di stato generico $|\psi\rangle$ nella base degli autostati della posizione e nella base degli autostati dell'impulso.
- (2) In uno spazio d -dimensionale, determinare il generatore delle traslazioni lungo una direzione \hat{n} , dove \hat{n} è un qualunque versore (vettore di norma uno) nello spazio dato, ed esprimere il risultato in termini dell'operatore impulso d -dimensionale \vec{p} . Scrivere quindi l'operatore che realizza una traslazione finita di lunghezza k lungo \hat{n} , prima in termini del generatore, e poi esplicitamente nella base delle coordinate.
- (3) Dimostrare che se al tempo $t = 0$ una particella libera si trova in uno stato isotropo, cioè tale che $\langle\vec{x}|\psi\rangle$ non dipende dalla direzione del vettore \vec{x} allora le probabilità di una misura di impulso per il sistema dato è isotropa a qualunque tempo t .
- (4) Si consideri un sistema di due particelle di uguale massa m in una dimensione soggette al potenziale

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}m\omega^2 (5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2),$$

dove x_1 e x_2 sono le coordinate delle due particelle. Si determinino lo spettro di energia del sistema e la sua degenerazione.

- (5) Dimostrare che l'energia cinetica per un sistema di due corpi $T = \frac{1}{2m_1}\vec{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\vec{p}_2^2$ in termini dell'impulso totale $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, dell'impulso relativo $\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1 + m_2}$, della massa totale $M = m_1 + m_2$ e della massa ridotta $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$ prende la forma $T = \frac{1}{2M}\vec{P}^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{p}^2$. Discutere se il passaggio a coordinate baricentriche e relative sia l'unico che separa un problema centrale.
- (6) Per un sistema di due corpi, con funzione d'onda $\langle\vec{x}_1\vec{x}_2|\psi\rangle = \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, considerare l'operatore di parità \mathcal{P} e l'operatore di scambio \mathcal{S} , definiti rispettivamente da $\langle\vec{x}_1\vec{x}_2|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-\vec{x}_1, -\vec{x}_2)$ e $\langle\vec{x}_1\vec{x}_2|\mathcal{S}|\psi\rangle = \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$. Determinare l'azione degli operatori \mathcal{P} ed \mathcal{S} esprimendo \vec{x}_1 e \vec{x}_2 in coordinate del baricentro e relativa, e scrivendo queste ultime in coordinate sferiche.
- (7) Esprimere la delta di Dirac d -dimensionale $\delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta(x^1 - x_0^1)\delta(x^2 - x_0^2) \dots \delta(x^d -$

x_0^d) in coordinate ipersferiche, definite come

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi_1 \\ r \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\ \dots \\ r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \dots \sin \phi_{d-1} \end{pmatrix}.$$

(8) Dimostrare che l'operatore impulso radiale p_r è hermitiano verificando che

$$(\langle \psi | p_r | \phi \rangle)^* = \langle \phi | p_r | \psi \rangle$$

attraverso il calcolo esplicito dell'elemento di matrice nella base delle coordinate ed in coordinate sferiche.

(9) Determinare i commutatori $[\hat{L}^i, \hat{x}^j]$ e $[\hat{L}^i, \hat{p}^j]$, ed interpretare il risultato.

(10) Determinare la legge di evoluzione temporale (alla Heisenberg) per l'operatore momento angolare \vec{L} , in presenza di una hamiltoniana della forma $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$. Confrontare il risultato con il risultato classico.

(11) Determinare i valori delle indeterminazioni $(\Delta L_x)^2$ e $(\Delta L_y)^2$ in un autostato di L^2 ed L_z . Determinare inoltre gli stati "di minima indeterminazione" che minimizzano il valore del prodotto $\Delta L_x \Delta L_y$.

(12) Definire l'operatore momento angolare lungo un asse qualsiasi \vec{n} , $L_n \equiv \vec{n} \cdot \vec{L}$, con $|\vec{n}| = 1$. Dimostrare che su un qualunque stato $|lm\rangle$ tale per cui $l = 1$ (momento angolare pari ad uno)

$$(L_n^3 - \hbar^2 L_n)|lm\rangle = 0$$

(identità di Hamilton-Cayley). Dimostrare inoltre che se ψ è un autostato di L_n allora il valor medio delle componenti di \vec{L} nel piano ortogonale ad \vec{n} è nullo.

(13) Dimostrare che: (a) un autostato dell'impulso $|\vec{k}\rangle$ è anche autostato di $\vec{k} \cdot \vec{L}$; (b) uno stato $|\phi\rangle$ tale che $\langle \vec{x} | \phi \rangle = \phi(r)$ (dove r è la coordinata radiale) è autostato di tutte le componenti del momento angolare \vec{L} e spiegare perché ciò non contraddice il fatto che gli operatori L^i sono incompatibili; (c) uno stato avente funzione d'onda $\vec{n} \cdot \vec{x} \phi(r)$ è autostato di $\vec{n} \cdot \vec{L}$; (d) uno stato avente funzione d'onda $\vec{n} \cdot \vec{x} \phi(r)$ è autostato di L^2 .

(14) Si consideri un sistema di spin uno, e si supponga che la sua evoluzione temporale sia data dall'hamiltoniana

$$H = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

dove \vec{B} è un vettore fisso esterno a componenti reali, e \vec{S} è l'operatore spin. Si determini e risolva la legge del moto per gli stati fisici in rappresentazione di Schrödinger. Si utilizzi la soluzione per determinare la probabilità che una misura di momento angolare eseguita al tempo T su di una particella che si trova nello stato di $m = +1$ al tempo $t = 0$ dia come risultato $m = -1$. Si ripeta tutta la trattazione utilizzando la rappresentazione di Heisenberg per l'evoluzione temporale.

(15) Determinare le matrici di L_x , L_y ed L_z per un sistema di spin uno *nella base degli autostati di L_z* , ossia gli elementi di matrice $\langle 1, m | L_i | 1, m' \rangle$. Determinare la trasformazione unitaria che realizza il cambiamento da questa base a quella (discussa a lezione) in cui gli elementi di matrice di L_i valgono $\langle j | L_i | k \rangle = -i\hbar\epsilon^{ijk}$.

(16) Sia dato un sistema di tre particelle diverse di spin $\frac{1}{2}$, che interagiscono attraverso l'hamiltoniana

$$H = V(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1),$$

dove \vec{s}_i è l'operatore di spin per la i -esima particella. Si determinino lo spettro degli autovalori di energia per questa hamiltoniana e la loro degenerazione.

(17) Si determini la probabilità che una particella di spin $\frac{1}{2}$ avente $s_z = +\frac{1}{2}$ sia rivelata con spin pari a $\pm\frac{1}{2}$ lungo un asse \vec{n} qualunque.

(18) Considerare l'elemento di matrice dell'operatore di spin \vec{s} in uno stato $|\psi\rangle$ per una particella di spin $\frac{1}{2}$:

$$\vec{s}_\psi \equiv \langle \psi | \vec{s} | \psi \rangle.$$

Dimostrare che se si agisce su $|\psi\rangle$ con una rotazione R attorno ad un asse qualunque $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = R|\psi\rangle$ l'elemento di matrice $\vec{s}_{\psi'}$ si ottiene da \vec{s}_ψ eseguendo una rotazione dello stesso angolo attorno allo stesso asse.

(19) Determinare i coefficienti di Clebsch-Gordan per la composizione di uno spin 1 ed uno spin $\frac{1}{2}$.

(20) Sia dato un sistema di due particelle di spin $\frac{1}{2}$ che interagiscono attraverso la hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) + B_1 \vec{L} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) + B_2 \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2,$$

dove \vec{L} è il momento angolare relativo del sistema di due particelle. Si separi completamente il problema, e supponendo noto e non-degenere lo spettro dell'hamiltoniana radiale, si determinino lo spettro di H e la sua degenerazione.

(21) Siano \vec{L}_1 e \vec{L}_2 gli operatori di momento angolare orbitale per un sistema di due particelle. Considerare l'insieme degli stati con $l_1 = 1$ e $l_2 = 1$. Scrivere la più generale funzione d'onda del sistema. Determinare quindi la più generale funzione d'onda del sistema con momento angolare totale $l = 0$, $l = 1$ e $l = 2$.

(22) Considerare un sistema di una particella soggetta ad un potenziale centrale $V(r)$. Determinare la Hamiltoniana e le equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg in un sistema di riferimento rotante con velocità ω intorno ad un asse qualunque. Specificare un insieme di operatori commutanti con l'hamiltoniana i cui autovalori determinano completamente lo stato del sistema, e determinare la degenerazione degli autostati di energia.

- (23) Si consideri un oscillatore armonico *bidimensionale* isotropo avente hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{x}^2,$$

con operatori di distruzione $a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x_i + i\frac{p_i}{m\omega})$. Si definiscano gli operatori

$$j_a \equiv \sum_{i,j=1}^2 a_i^\dagger \sigma_{ij}^a a_j,$$

dove σ_{ij}^a è la a -esima matrice di Pauli di componenti i, j . Si determinino le relazioni di commutazione degli operatori j^a fra di loro e con l'hamiltoniana. Si esprima l'operatore $j_1^2 + j_2^2 + j_3^2$ in termini dell'hamiltoniana, e si utilizzi il risultato per determinare lo spettro dell'hamiltoniana e la sua degenerazione. Si confronti con il risultato che si ottiene separando il problema in coordinate cartesiane.

- (24) Determinare le relazioni di commutazione dei nove operatori $a_i^\dagger a_j$ (dove i, j possono assumere qualunque valore da uno a tre) tra di loro e con l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico. Determinare in particolare le relazioni di commutazione fra i tre operatori $O_i = \epsilon^{ijk} a_j^\dagger a_k$, e la loro espressione esplicita nella base delle coordinate. Discutere la degenerazione dello spettro dell'oscillatore armonico tridimensionale isotropo alla luce dei risultati ottenuti.
- (25) Considerare una particella di massa μ soggetta ad un potenziale centrale della forma $V(r) = \lambda^2 r^\alpha$. Determinare la dipendenza degli autovalori di energia dai parametri fisici μ, λ e α . Che cosa succede se $\alpha < -2$? Supponendo che il potenziale sia stato ottenuto da una interazione a due corpi tra particelle di massa m e M , se la massa M viene rimpiazzata da una massa M' , come variano gli autovalori di energia del sistema?
- (26) Dimostrare che per un oscillatore armonico tridimensionale in un autostato di energia i valori medi di energia cinetica e potenziale sono uguali $\langle T \rangle = \langle V \rangle$, confrontando la dipendenza dai parametri m ed ω dell'autovalore di energia e dell'hamiltoniana. Utilizzare il risultato per calcolare il prodotto dell'indeterminazione di $|\vec{x}|^2$ and $|\vec{p}|^2$ in un autostato di energia e confrontare il risultato con il principio di indeterminazione.
- (27) Dimostrare che per il sistema dell'esercizio (25) in un autostato di energia $\langle T \rangle$ e $\langle V \rangle$ sono proporzionali, e determinare il coefficiente di proporzionalità.
Suggerimento: Sfruttare l'indipendenza dal tempo degli elementi di matrice di qualunque operatore in uno stato stazionario, ed applicarla all'operatore viriale $\vec{x} \cdot \vec{p}$.
- (28) Determinare il valore medio di r e di r^2 e la posizione del massimo della densità di probabilità radiale $\rho(r)$ nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno. Confrontare il risultato con il raggio dell'orbita nel modello di Bohr.

(29) Determinare la densità di probabilità di impulso nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno.

(30) Considerare una particella soggetta all'hamiltoniana $H = H_0 - \omega L_z$, dove H_0 è l'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno e $\omega = \frac{eB}{2mc}$ è un accoppiamento con un campo magnetico di intensità B diretto lungo l'asse z . Al tempo $t = 0$ la particella si trova nello stato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|21-1\rangle - |211\rangle)$, dove $|nlm\rangle$ indica un'autofunzione idrogenoide. (a) Determinare la probabilità di trovare il sistema al tempo t negli stati $|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|21-1\rangle - |211\rangle)$; $|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|21-1\rangle + |211\rangle)$; oppure $|\phi_3\rangle = |210\rangle$. Qual è l'interpretazione fisica di questi stati?. (b) Determinare il valor medio dell'operatore momento di dipolo magnetico $\vec{\mu} = \frac{e}{3mc}\vec{L}$ ad ogni tempo t .

Suggerimento: usare la rappresentazione di Schrödinger per il punto (a) e la rappresentazione di Heisenberg per il punto (b).

(31) Dimostrare le seguenti proprietà del propagatore $K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = \langle \vec{x}' | S(t', t) | \vec{x} \rangle$:

(a)

$$K^*(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(\vec{x}, t; \vec{x}', t');$$

(b) se il sistema è invariante per traslazioni allora

$$K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(\vec{x}' - \vec{x}; t', t);$$

(c) se le autofunzioni della hamiltoniana sono reali allora

$$K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(\vec{x}, t'; \vec{x}', t);$$

(d) se le autofunzioni della hamiltoniana sono autostati della parità allora

$$K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(-\vec{x}', t'; -\vec{x}, t).$$

(32) Determinare la azione classica in termini delle condizioni iniziali e finali per una particella libera unidimensionale. Determinare quindi l'elemento di matrice dell'operatore di evoluzione temporale (propagatore)

$$K(q', t'; q, t) = \langle q', t' | e^{\frac{i}{\hbar} H(t'-t)} | q, t \rangle$$

e dimostrare che esso, a meno della normalizzazione, coincide con l'esponenziale di i/\hbar volte l'azione classica.

Suggerimento: inserire una risoluzione dell'identità rispetto agli autostati dell'impulso sia sullo stato iniziale che su quello finale.

Determinare il risultato nel limite $t' \rightarrow t$.

(33) Si consideri un sistema tridimensionale soggetto ad un potenziale idrogenoide schermato

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{e^2}{r} & 0 < r < R \\ -\frac{e^2}{r} e^{-\lambda(r-R)} & r > R \end{cases}$$

Si calcoli la correzione al primo ordine all'energia dello stato fondamentale. Si discutano gli andamenti quando $\lambda \rightarrow 0$ e quando $R \rightarrow \infty$.

- (34) La carica del nucleo di un atomo idrogenoide aumenta di una unità in seguito ad un decadimento β . Determinare la variazione di energia dell'elettrone nell' n -esimo stato al primo ordine in teoria delle perturbazioni. Confrontare con il risultato esatto.

Suggerimento: per il calcolo del valor medio, utilizzare il risultato del problema 27.

- (35) Si consideri un oscillatore armonico bidimensionale con potenziale

$$V(x, y) = \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + \lambda xy.$$

Si tratti l'ultimo termine come una perturbazione. Si determini la correzione ai primi due livelli eccitati al primo ordine in λ e l'effetto della perturbazione sulla loro degenerazione. Si determini la soluzione esatta del problema, si confronti con il risultato perturbativo, e si discuta per quali valori del parametro λ l'approssimazione perturbativa è buona.

Suggerimento: per determinare la soluzione esatta, si ricordi il metodo usato per risolvere il problema (4).

- (36) Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale, soggetto ad un campo elettrico costante nello spazio e gaussianamente smorzato nel tempo, ossia un potenziale della forma

$$V(x, t) = -e\mathcal{E}x \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right),$$

dove \mathcal{E} e τ sono un parametri reali positivi. Si determini la probabilità al primo ordine che il sistema che al tempo $t = -\infty$ si trova nello n -esimo autostato di energia dell'oscillatore armonico imperturbato $|n\rangle$ subisca una transizione al generico stato $|k\rangle$ al tempo t . Sotto quali condizioni la teoria delle perturbazioni dà un risultato affidabile? La somma di queste probabilità deve fare uno?

- (37) Determinare la sezione d'urto differenziale in approssimazione di Born per la diffusione da potenziale di Yukawa

$$V(r) = V_0 \frac{\lambda}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}}.$$

Ricavare quindi il risultato per la diffusione da potenziale coulombiano

$$V(r) = e^2 \frac{1}{r}$$

come caso limite.

Esprimere il risultato in termini dell'energia E della particella incidente e dell'angolo di scattering θ tra le direzioni degli impulsi \vec{k} , \vec{k}' della particella entrante e di quella uscente.

Suggerimento: Esprimere in termini di E e θ il modulo dell'impulso trasferito $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$.

Nel caso coulombiano, discutere la dipendenza della sezione d'urto da E e da \hbar .

(38) Considerare un sistema di N particelle la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i=1}^N V_i(\vec{x}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_{ij}(\vec{x}_i, \vec{x}_j). \quad (1)$$

Dimostrare che se le N particelle sono identiche, allora la quantità

$$\rho(\vec{x}, t) \equiv \langle \psi | \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_i) | \psi \rangle \quad (4)$$

non dipende da i . Considerare sia il caso di bosoni che di fermioni e discutere il significato fisico di $\rho(\vec{x}, t)$.

(39) Considerare un atomo di elio, formato da due elettroni identici di massa m e spin $\frac{1}{2}$ che si muovono nel potenziale di un nucleo. Detti $\vec{x}_1, \vec{p}_1, \vec{x}_2$ e \vec{p}_2 gli operatori posizione ed impulso dei due elettroni, ed e una costante reale (carica dell'elettrone), l'hamiltoniana è

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{12}; \\ H_0 &= \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - \frac{2e^2}{|\vec{x}_1|} - \frac{2e^2}{|\vec{x}_2|}, \\ H_{12} &= \frac{2e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \end{aligned}$$

Determinare funzione d'onda, energia e degenerazione per lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato del sistema.