PROBLEMI DI FISICA QUANTISTICA

SECONDA PARTE
anno accademico 2024-2025

(1) Per un sistema meccanico d-dimensionale determinare:

(a) gli elementi di matrice dell'operatore posizione $\vec{x}$ e dell'operatore impulso $\vec{p}$ tra autostati dell'impulso $|\vec{p}\rangle$;
qual è l'operatore che genera la trasformazione $k_i \to k_i + \delta$, dove k_i è l'i-esima componente dell'impulso?

(b) le autofunzioni dell'operatore posizione nella base degli autostati dell'impulso $\langle \vec{k}|\vec{x}\rangle$;
le condizioni di autostato rispetto alle diverse componenti dell'impulso sono indipendenti?

(c) la relazione tra le espressioni di un vettore di stato generico $|\psi\rangle$ nella base degli autostati della posizione e nella base degli autostati dell'impulso.
idem: il cambio di base tra autofunzioni della posizione e dell'impulso lungo ciascuna dimensione dipende dalle altre dimensioni?

(2) In uno spazio d-dimensionale:

(a) determinare il generatore della trasformazione $\vec{k} \to \vec{k} + \hat{n}$, dove $\vec{k}$ è un vettore impulso, e $\hat{n}$ è un qualunque versore (vettore di norma uno), ed esprimere il risultato in termini dell'operatore posizione d-dimensionale $\hat{\vec{x}}$ nello spazio degli impulsi;
Che differenza c'è fra questo caso e quello della domanda precedente?

(b) scrivere l'operatore che realizza la trasformazione finita discussa al punto precedente, prima in termini del generatore, e poi esplicitamente nella base degli autostati dell'impulso.
Che relazione c'è tra trasformazione finita ed infinitesima?

(3) Si consideri una sistema di tre particelle in una dimensione aventi la stessa massa m, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_3^2 + \lambda x_2, \tag{1}$$

dove x_i e p_i sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso delle tre particelle, e ω e λ sono costanti reali positive.

(a) Nel caso $\lambda = 0$, determinare lo spettro della hamiltoniana, la sua degenerazione, e la funzione d'onda di stato fondamentale.
Di che hamiltoniana si tratta? Come è fatto lo spettro di una hamiltoniana separabile? Come è definita la degenerazione? Come è fatta la funzione d'onda di una hamiltoniana separabile?

(b) Scrivere le equazioni di Heisenberg per gli operatori x_i e p_i nel caso generale in cui $\lambda \neq 0$ e risolverle nel caso $\lambda = 0$.
Che equazioni sono?

(c) Determinare lo spettro, la degenerazione e la funzione d'onda di stato fondamentale della hamiltoniana H_0 nel caso $\lambda \neq 0$.
Si riece a riscrivere la hamiltonana in termini di una hamiltoniana nota?

(d) Determinare i valori medi degli operatori x_i e p_i in qualunque autostato della hamiltoniana.
Qual è la trasformazione che lega le due hamiltoniane?

(e) Determinare l'operatore $\mathcal{O}_\lambda$ tale che $\mathcal{O}_\lambda|0_0\rangle = |0_\lambda\rangle$, dove $|0_0\rangle$ e $|0_\lambda\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale della hamiltoniana quando $\lambda = 0$ e quando $\lambda \neq 0$.
Qual è l'operatore che realizza la trasformazione che lega le due hamiltoniane?

(4) Considerare una particella tridimensionale la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\left[\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}(x_1)^2 + \left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)x_1x_2 + \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}(x_2)^2 + \omega_3^2(x_3)^2\right] \tag{2}$$

dove x_1, x_2, x_3 sono le tre componenti dell'operatore posizione per la particella e $\vec{p}$ è il corrispondente vettore di operatori impulso

(a) Confrontare spettro, degenerazione e autofunzione di stato fondamentali per la hamiltoniana Eq. (2) quando $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ con quelli della hamiltoniana Eq. (1) quando $\lambda = 0$.
C'è differenza fra questo caso e quello della domanda precedente?

(b) Supponendo ora $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, ma $\omega_3 \neq \omega$ determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana, nel caso generale in cui ω e ω_3 sono incommensurabili.
Come si calcola la degenerazione?

(c) Determinare lo spettro, la degenerazione e la funzione d'onda di stato fondamentale della hamiltoniana $H' = T_3^{-1}(\delta)HT_3(\delta)$, dove $T_3(\delta)$ è l'operatore che realizza una traslazione di lunghezza δ lungo l'asse x_3:

$$T_3(\delta) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\delta p_3\right), \tag{3}$$

sempre nel caso in cui $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, ma $\omega_3 \neq \omega$.
Come sono legati autifunzioni e autovalori di hamiltoniane unitariamente equivalenti?

(d) Nel caso in cui $\omega_1 \neq \omega_2$ separare la hamiltoniana nella somma di tre hamiltoniane commutanti eseguendo una trasformazione di coordinate della forma $x'_i = V_{ij}x_j$. Determinare la matrice V e determinare gli impulsi p'_i che soddisfano le relazioni di commutazione canoniche $[p_i, x_j] = -i\hbar\delta_{ij}$. Determinare infine spettro e degenerazione della hamiltoniana.
Pensando a x_i come vettore colonna, qual è la trasformazione che separa il problema?

(5) Considerare una sistema di due particelle unidimensionali, la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \hbar\omega\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2\right) + \hbar\lambda\left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1\right) \tag{4}$$

dove a_i è un operatore che agisce sullo spazio degli stati fisici della i-esima particella, e gli a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \tag{5}$$

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \tag{6}$$

per ogni i, j.

(a) determinare la più generale trasformazione lineare degli operatori a_i che preserva le relazioni di commutazione;
Che condizione deve soddisfare la trasformazione?

(b) utlizzare il risultato del punto precedente per determinare lo spettro della hamiltoniana.
Che relazione c'è tra gli autovalori di energia e la hamiltoniana scritta nella forma Eq. (4)?

(c) Esprimere i ket di stato fondamentale e primo stato eccitato della hamiltoinana in termini dei ket di stato associati agli autostati della hamiltoniana $H_0 = \hbar\omega\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2\right)$.
Che relazione c'è fra gli operatori di creazione e distruzione associati alle due hamiltoniane?

(d) Suppore che al tempo $t = 0$ il sistema sia preparato nello stato $|\psi\rangle = a_1^\dagger|0\rangle$ dove $|0\rangle$ è lo stato fondamentale della hamiltoniana, e determinare la probabilità che al tempo t = T il sistema venga rivelato nello stato $|\phi\rangle = a_2^\dagger|0\rangle$.
Che forma ha la matrice della hamiltoniana nel sottospazio dei due stati inziale e finale?

(6) (a) Dimostrare che l'energia cinetica per un sistema di due corpi $T = \frac{1}{2m_1}\vec{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\vec{p}_2^2$ in termini dell'impulso totale $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, dell'impulso relativo $\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1+m_2}$, della massa totale $M = m_1 + m_2$ e della massa ridotta $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$ prende la forma $T = \frac{1}{2M}\vec{P}^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{p}^2$.
Si può fare la stessa manipolazione che nel caso classico?

(b) Discutere se il passaggio a coordinate baricentrali e relative sia l'unico che separa un problema centrale.
Quali condizioni deve soddisfare il cambio di coordinate?

(7) Considerare una coppia di particelle in tre dimensioni aventi la stessa massa m e cariche elettriche q_1 e q_2, con dinamica descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = H_1 + H_2 + V_{12} \tag{7}$$

dove H_i sono hamiltoniane di singola particella aventi la forma

$$H_i = \frac{\vec{p}_i^2}{2m} - q_i\vec{E}\cdot\vec{x}_i + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{x}_i^2 \tag{8}$$

e il potenziale di interazione a due corpi V_{12} è dato da

$$V_{12} = -m\omega^2\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2; \tag{9}$$

$\vec{E}$ (campo elettrico) è un vettore (costante) a componenti reali e q_i sono costanti reali positive.

(a) Separare l'hamiltoniana H_0 in una parte baricentrale ed una parte relativa e dimostrare che commutano.
Che forma assume la hamiltoniana in termini di coordinate baricentrali e relative?

(b) Determinare spettro e degenerazione della hamiltoniana relativa nel caso in cui $q_1 = q_2$.
Si può separare in termini di problemi unidimensionali noti?

(c) Discutere se sia possibile determinare esattamente lo spettro della Hamiltoniana baricentrale e se sia continuo o discreto.
Di che hamiltoniana si tratta?

(d) Determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana relativa nel caso $q_1 \neq q_2$ e discutere se siano diversi da quelli trovati nel caso $q_1 = q_2$.
C'è un cambio di coordinate che permette di elminare l'accoppiamento con il campo elettrico?

(e) Nel caso del punto precedente determinare i valori medi degli operatori posizione ed impulso relativi in un qualunque autostato della hamiltoniana.
Quanto calgono i valori medi di posizione e impulso negli autostati di oscillatore armonico?

(8) Considerare un sistema formato da n particelle di uguale massa m ed una particella di massa M, in una dimensione spaziale, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p_0^2}{2M} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^2}{2m} + V(x_i, x_0)\right), \tag{10}$$

dove x_i, p_i, x_0, p_0 sono gli operatori posizione e impulso rispettivamente per le n particelle di massa m e per la particella di massa M, ed il potenziale $V(x_i, x_0)$ ha la forma

$$V(x_i, x_0) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_i - x_0| \leq L \\ V_0 \text{ se } |x_i - x_0| > L \end{cases}, \tag{11}$$

dove $V_0 \to \infty$ e L è una costante reale e positiva.

(a) Separare la hamiltoniana H_0 nella somma di $n+1$ hamiltoniane commutanti, considerando $\frac{m}{M}$ trascurabile ($\frac{m}{M} \ll 1$).
Qual è l'espressione delle coordinate baricentrali e relative?

(b) Determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato per la hamiltoniana data.
Qual è lo spettro baricentrale, e quale lo spettro delle hamiltoniane relative?

(c) Scrivere (senza risolverle) le equazioni del moto alla Heisenberg per il sistema separato secondo la prima domanda.
Come si scrive un potenziale tipo buca usando la funzione a gradino di Heaviside?

(9) Considerare una coppia di particelle in tre dimensioni aventi la stessa massa m e cariche elettriche q_1 e q_2, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 - q_1\vec{E}\cdot\vec{x}_1 - q_2\vec{E}\cdot\vec{x}_2, \tag{12}$$

dove $\vec{x}_i$ e $\vec{p}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso delle due particelle, e $\vec{E}$ (campo elettrico) è un vettore (costante) di numeri reali.

(a) Separare l'hamiltoniana in una parte baricentrale ed una parte relativa e dimostrare che commutano.
Qual è l'espressione delle coordinate baricentrali e relative? Quali sono le loro regole di commutazione?

(b) Sfruttando il risultato della domanda precedente, determinare le equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg (senza risolverle) per gli operatori posizione ed impulso e per l'operatore

$$\vec{D} = q_1\vec{x}_1 + q_2\vec{x}_2, \tag{13}$$

(momento di dipolo elettrico).
Quanto valgono i commutatori di tutte le variabili date con la hamiltoniana?

(c) Nel caso $q_1 = q_2$, determinare il valor medio di una misura del momento di dipolo al tempo t in termini di opportune condizioni iniziali al tempo $t = 0$, specificando quante e quali condizioni iniziali sono necessarie per determinare completamente il risultato.
Da che coordinate canoniche dipende il momento di dipolo in questo caso?

(10) (a) Per un sistema *bidimensionale*, determinare l'operatore (hermitiano) impulso radiale, ed determinare l'operatore energia cinetica esplicitamente in coordinate polari (r, θ),

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{14}$$

(b) Dimostrare che in d dimensioni

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\dagger = -\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{d-1}{r}\right) \tag{15}$$

attraverso il calcolo dell'elemento di matrice $\langle\psi|\tilde{p}_r|\phi\rangle$ nella rappresentazione delle coordinate, dove $\tilde{p}_r = -i\hbar\frac{\partial}{\partial r}$.
Qual è l'espressione dell'elemento di volume in d dimensioni?

(c) Separare l'operatore cinetico in d dimensioni in parte radiale e parte angolare, sfruttando l'espresione del laplaciano in d dimensioni

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{L^2}{r^2}, \tag{16}$$

dove L^2 è un operatore che agisce solo sulle variabili angolari.
Qual è l'espressione della derivata radiale?

(11) Considerare una trasformazione generale di coordinate in d dimensioni $\vec{x} \to \vec{\xi}$, con $\xi_i = \xi_i(x_j)$.

(a) Determinare l'espressione della delta di Dirac d dimensionale $\delta^{(d)}(\vec{\xi}-\vec{\alpha})$, dove $\vec{\alpha}$ è un vettore (costante) d-dimensionale in termini della delta di Dirac $\delta^{(d)}(\vec{x})$, definita come

$$\delta^{(d)}(\vec{x}) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\ldots\delta(x_n), \tag{17}$$

dove $x_1, \ldots, x_d$ sono le d componenti del vettore $\vec{x}$.
Come si trasforma la delta unidimensionale sotto un cambio di coordinate?

(b) Esprimere la delta di Dirac d-dimensionale $\delta^{(d)}(\vec{x}-\vec{x}_0) = \delta(x^1-x_0^1)\delta(x^2-x_0^2)\ldots\delta(x^d-x_0^d)$ in coordinate ipersferiche, definite come

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \ldots \\ x^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi_1 \\ r\sin\phi_1\cos\phi_2 \\ \ldots \\ r\sin\phi_1\sin\phi_2\ldots\sin\phi_{d-1} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Come è fatta la misura di integrazione in coordinate ipersferiche?

(12) Determinare ad ogni tempo t il valor medio del vettore posizione $\langle\vec{x}\rangle$ e del vettore impulso $\langle\vec{p}\rangle$ per un sistema che al tempo zero ha

$$\langle\vec{x}\rangle = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \langle\vec{p}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ p_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

e la cui dinamica è descritta dalla Hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \vec{B}\cdot\vec{L}, \tag{20}$$

dove $\vec{B}$ è il vettore costante

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Che trasformazione è l'evoluzione temporale per la hamiltoniana data?

(13) Considerare un sistema avente hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\kappa}{2I}(\vec{L})^2 + \hbar\vec{B}\cdot\vec{L} \tag{22}$$

dove sono gli operatori di momento angolare, I e κ sono costanti reali positive, e $\vec{B}$ è un vettore tridimensionale a componenti reali (non necessariamente positive).

(a) Determinare lo spettro dell'hamiltoniana data e la sua degenerazione, sia quando $\vec{B} = 0$ che quando $\vec{B} \neq 0$.
Qual è lo spettro del momento angolare?

(b) Scrivere le equazioni di Heisenberg per gli operatori $\vec{L}$, $\vec{x}$ e $\vec{p}$.
Che relazioni di commutazione soddisfa $\vec{L}$?

(c) Supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi in uno stato sovrapposizione equiprobabile del primo e del secondo livello eccitato della hamiltoniana H_0. Determinare la probabilità che al tempo t esso si trovi nella sovrapposizione degli stessi due stati ortogonale a quella in cui si trova al tempo $t = 0$.
Come è fatto l'operatore di evoluzione temporale?

(14) Considerare gli autostati del momento angolare $|lm\rangle$.

(a) Calcolare il valor medio in un autostato generico degli operatori L_x, L_y, L_x^2 ed L_y^2.
Come si esprimono gli operatori L_i in termini di operatori di innalzamento e abbassamento?

(b) Usare il risultato della domanda precedente per calcolare l'indeterminazione di L_x, L_y e il prodotto $\Delta L_x \Delta L_y$ in ogni autostato e confrtontare il risultato con il principio di indeterminazione.
Qual è la forma della relazione di indeterminazione?

(c) Definire le matrici $(2l + 1) \times (2l + 1)$

$$\bar{L}^i_{mm'} \equiv \langle lm|L^i|lm'\rangle \tag{23}$$

e calcolare la traccia del prodotto di due di queste matrici, $\mathrm{Tr}(\bar{L}^i\bar{L}^j)$, con $i \neq j$.
Che relazione di commutazione soddisfano le L_i?

(15) Considerare il sistema della domanda (4) con hamiltoniana Eq. (2).

(a) Scrivere le equazioni del moto alla Heisenberg per gli operatori di momento angolare L_i. Discutere se siano conservati o meno nei tre casi $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$, $\omega_1 = \omega_2 \neq \omega_3$, $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3$.
Che simmetria ha il sistema nei tre casi?

(b) Nel caso $\omega_1 = \omega_2 \neq \omega_3$ al tempo $t = 0$ viene eseguita una misura di energia che rivela il sistema nello stato fondamentale. Ad un qualunque tempo successivo $t > 0$ viene eseguita una misura di L_z. Quali sono i possibili risultati di questa misura?
Che simmetria ha lo stato fondamentale?

(16) Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\left(\vec{L} + \vec{B}\right)^2}{2I}, \tag{24}$$

dove $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ sono gli operatori di momento angolare, I è una costante reale positiva, e $\vec{B}$ è un vettore tridimensionale a componenti reali (non necessariamente positive).

(a) Determinare le equazioni del moto alla Heisenberg per gli operatori $\vec{L}$ per un sistema soggetto alla hamiltoniana H..
Che forma ha la hamiltoniana in termini di operaoti di momento angolare?

(b) Determinare gli autostati ed autovalori dell'hamiltoniana H e la loro degenerazione, sia quando $\vec{B} = 0$ sia quando $\vec{B} \neq 0$.
Nel caso $\vec{B} \neq 0$ come si fa a scrivere la hamiltoniana in termini di operatori diagonalizzabili simultaneamente?

(c) Supporre che il vettore $\vec{B}$ sia diretto lungo l'asse z. Determinare la probabilità che se il sistema descritto dall'hamiltoniana al tempo $t = 0$ si trova nello stato

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|11\rangle + |1-1\rangle) \tag{25}$$

al tempo t esso venga rivelato nello stato

$$|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|11\rangle - |1-1\rangle), \tag{26}$$

dove $|lm\rangle = |1 \pm 1\rangle$ sono autostati del momento angolare.
Qual è l'interpretazione fisica degli stati $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$?
Come agisce l'operatore di evoluzione temporale sullo stato del sistema?

(d) Supporre ora che il sistema sia posto in un sistema di riferimento rotante, attorno ad un asse parallelo a $\vec{B}$, con pulsazione ω. Determinare lo spettro di energia nel sistema rotante se nel sistema a riposo l'hamiltoniana è la H Eq. (24).
Qual è la relazione fra lo stato nel sistema rotante e quello nel sistema a riposo, e qual è la relazione fra le rispettive equazioni del moto?

(17) Considerare uno stato $|0\rangle$ avente funzione d'onda

$$\langle \vec{x}|0\rangle = \psi_0(\vec{x}) = f(r), \tag{27}$$

con $r = |\vec{x}|$, ed i tre stati $|i\rangle$ aventi funzione d'onda

$$\langle \vec{x}|i\rangle = \psi_i(\vec{x}) = x^i \psi_0(\vec{x}). \tag{28}$$

(a) Dimostrare che $\psi_0(\vec{x})$ è un autostato di tutte le componenti L^i del momento angolare e dunque anche di L^2 e determinare l'autovalore corrispondente.
Che trasformazione genera L_i, e come si trasforma r sotto questa trasformazione?

(b) Dimostrare che $\psi_i(\vec{x})$ è un autostato di L_i e determinare l'autovalore corrispondente.
Che trasformazione genera L_i, e come si trasforma x^i sotto questa trasformazione?

(c) Calcolare il commutatore $[L_i, [L_i, x^j]]$ ed utilizzare il risultato per dimostrare che $\psi_i(\vec{x})$ sono tutti autostati di L^2 e determinare l'autovalore corrispondente.
Quanto vale il commutatore di L_i con x^j?

(18) Considerare lo spazio degli stati fisici avente per vettori di base i tre stati $|i\rangle$ Eq. (28).

(a) Determinare le matrici che rappresentano gli operatori di momento angolare L^i in questo spazio, ossia

$$L^i_{jk} = \langle j|L^i|k\rangle. \tag{29}$$

Quanto vale il commutatore di L^i con x^j?

(b) Diagonalizzare l'operatore $L_z \equiv L^3$ in questo spazio e determinare la matrice di passaggio fra la base degli stati Eq. (28) e la base in cui L_z è diagonale.
Come è fatta la matrice di cambio di base?

(c) Determinare gli elementi di matrice di tutt'e tre gli operatori L^i nella base in cui L_z è diagonale *senza* usare la matrice di cambiamento di base determinata al punto precedente, ma sfruttando le relazioni di commutazione fra ghli operatori L^i.
Come si esprimono L^i in termini di $L_\pm$?

(d) Determinare in questa base gli autostati dell'operatore $\vec{n} \cdot \vec{L}$, dove $\vec{n}$ è un asse qualunque, in termini degli angoli θ, ϕ che determinano la direzione di $\vec{n}$.
Qual è la forma della matrice $\vec{n} \cdot \vec{L}$?

(19) Considerare un stato $|\psi\rangle$ al tempo $t = 0$ tale che

$$L^2|\psi\rangle = 2\hbar^2|\psi\rangle \tag{30}$$

$$\frac{L_x + L_y}{\sqrt{2}}|\psi\rangle = \hbar|\psi\rangle\,. \tag{31}$$

(a) Determinare $|\psi\rangle$.
Qual è l'espressione di $|\psi\rangle$ nella base degli autostati di L^2 e L_z?

(b) Sia $H = \alpha L^2 + \beta L_z$, con α e β parametri reali. Determinare, al tempo t generico, $|\psi, t\rangle$ e $\langle L_i\rangle_t$.
Quali sono le equazioni del moto alla Heisenberg per L_i?

(20) Considerare un sistema di spin $\frac{1}{2}$.

(a) Determinare la matrice dell'operatore spin lungo una direzione $\vec{n}$ qualunque nella base degli autostati di s_z, , in termini degli angoli θ, ϕ che determinano la direzione di $\vec{n}$.
Che forma hanno le matrici di Pauli?

(b) Determinare nella stessa base l'operatore di proiezione dello spin lungo $\vec{n}$.
Come è fatto un operatore di proiezione?

(c) Determinare, sempre nella stessa base, gli autostati dello spin lungo $\vec{n}$.
Che relazione c'è fra operatore di proiezione e autostati?

(d) Supporre che sia stata eseguita una misura di spin lungo l'asse $\vec{n}$ che ha dato come risultato $s_{\vec{n}} = +\frac{1}{2}$. Determinare le probabiltà che una misura di spin lungo l'asse z immediatamente successiva dia come risultato $\pm\frac{1}{2}$.
Qual è la relazione fra gli autostati dello spin nelle due direzioni $\vec{n}$ e z?

(e) Definire la quantitá $\vec{v}$ le cui componenti sono date da

$$v^i \equiv \langle\psi|s^i|\psi\rangle, \tag{32}$$

dove $|\psi\rangle$ è uno stato qualunque di spin $\frac{1}{2}$, e s^i sono gli operatori di spin. Eseguire una rotazione di angolo θ attorno all'asse $\vec{n}$ dello stato $|\psi\rangle$:

$$|\psi'\rangle = R^{\theta}_{\vec{n}}|\psi\rangle. \tag{33}$$

Determinare come si trasforma $\vec{v}$, ossia definito

$$v'_i = \langle\psi'|s^i|\psi'\rangle, \tag{34}$$

determinare la matrice M_{ij} tale che

$$v'_i = M_{ij}v_j. \tag{35}$$

Che cosa succede quando θ è infinitesimo??

(21) Considerare un sistema di spin $\frac{1}{2}$ soggetto alla hamiltoniana

$$H = \vec{B} \cdot \vec{\sigma}, \tag{36}$$

dove $\vec{B}$ è un vettore a componenti reali. Al tempo $t = 0$ viene eseguita una misura di spin lungo l'asse z, che dà come risulato $s_z = +\frac{1}{2}$

(a) Determinare lo stato del sistema ad ogni tempo t, espresso nella base degli autostati di $\hat{s}_z$.
Come si trasforma lo stato?

(b) Determinare le probabilità dei risultati di una misura di spin lungo l'asse z ad un qualunque tempo t.
Da che cosa è data l'ampiezza di probabilità?

(c) Come cambia la risposta alle domande (a-b) se si scambia il ruolo del vettore $\vec{B}$ e dell'asse z, cioè la hamiltoniana è data da $H = B_z$ e al tempo $t = 0$ si misura lo spin lungo l'asse $\vec{B}$?
Qual è la trasformazione che lega lo stato al tempo t con quello al tempo $t = 0$?

(d) Determinare il valor medio dello spin $\vec{s}(t) = \langle \hat{\vec{s}} \rangle$ ad ogni tempo t.
Come si trasforma σ^i?

(22) Determinare i coefficienti di Clebsch-Gordan per la composizione di due spin 1.
Qual è il valore massimo dello spin totale? In quanti modi si può realizzare $s_z = 1$ totale?

(23) Considerare un sistema formato da due particelle di uguale massa m e spin $\frac{1}{2}$ in tre dimensioni confinate all'interno di un parallelepipedo, ossia aventi dinamica descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + V(\vec{x}_1) + V(\vec{x}_2) + \frac{\lambda}{\hbar^2}\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \tag{37}$$

dove $\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$ $\vec{s}_i$ e sono rispettivamente gli operatori posizione, impulso e spin per le due particelle e il potenziale $V(\vec{x}_i)$ ha la forma

$$V(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_i^{(j)}| \leq a_j \\ V_0 \text{ se } |x_i^{(j)}| > a_j \end{cases}, \tag{38}$$

dove $V_0 \to \infty$, $x_i^{(j)}$ è la j-esima componente dell'operatore posizione per la i-esima particella e a_i sono costanti reali positive.

(a) Determinare lo spettro della hamiltoniana H.
In che base di spin la hamiltoniana si diagonalizza?

(b) Determinare la degenerazione dello stato fondamentale e dei primi due stati eccitati nel caso $a_1 = a_2 = a_3$, a seconda del valore di λ.
Quali sono il primo ed il secondo stato eccitato?

(c) Rispondere nuovamente alla due domande precedenti, ma supponendo ora che si tratti di particelle di spin 1.
Quali sono i valori permessi dello spin totale in questo caso?

Supporre ora che la hamiltoniana sia data da

$$H_1 = H + \frac{\mu}{\hbar}\vec{B} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \tag{39}$$

dove H è data dalla Eq. (37) μ è una costante reale positiva e $\vec{B}$ è il vettore a componenti reali $\vec{B} = (B, 0, 0)$.

(d) Rispondere nuovamente alle prime due domande in questo caso.
Quali componenti dello spin possono essere diagonalizzate simultaneamente?

(e) Determinare la probabilità che una misura dello spin della prima particella lungo l'asse z dia il risultato $s_1^z = \frac{1}{2}$, se il sistema si trova nello stato fondamentale (supponendo $\mu B \ll \lambda$).
Quanto vale lo spin totale nello stato fondamentale?

(f) La misura del punto precedente viene effettuata al tempo $t = 0$. Determinare la probabilità che al tempo T una seconda misura di spin per la prima particella dia lo stesso risultato.
Qual è lo stato del sistema al tempo $t = 0$ e come si scriver in termini di autostati della hamiltoniana?

(24) Considerare un sistema di tre particelle di spin $\frac{1}{2}$ la cui hamiltoniana è data da

$$H_s = -\lambda \left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3 \right), \tag{40}$$

dove λ è una costante reale positiva.

(a) Determinare lo spettro della hamiltoniana e la degenerazione di ciascuno stato.
In quanti modo può essere costruito ciascuno stato?

(b) Determinare le funzioni d'onda dello stato fondamentale.
Come è fatto l'operatore di abbassamento?

(25) Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = H_1 + H_2 \tag{41}$$

$$H_1 = \hbar\omega a_1^\dagger a_1; \qquad H_2 = \hbar\omega a_2^\dagger a_2 \tag{42}$$

e gli a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \tag{43}$$

per ogni i, j, mentre

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}. \tag{44}$$

(a) Definire i tre operatori

$$j^a = \frac{\hbar}{2} \sum_{i,j=1}^{2} a_i^\dagger \sigma_{ij}^a a_j, \tag{45}$$

dove σ_{ij}^a è la a–esima matrice di Pauli di componenti i, j, e determinare le relazioni di commutazione $[j^a, j^b]$ fra qualunque coppia di questi operatori. Normalizzare le matrici di Pauli in modo che abbiano autovalori ± 1.
Come commutano fra loro le matrici di Pauli?

(b) Determinare quali degli operatori j^a possono essere diagonalizzati simultaneamente alla hamiltoniana H_0.
Le relazioni di commutazione del punto precedente a che cosa corrispondono?

(c) Scrivere gli autostati della hamiltoniana H_0 nella base in cui sono diagonali H_1 e H_2 in termini degli autostati di H_1 e H_2. Dimostrare che in questa base è anche diagonale l'operatore j^3 e determinarne lo spettro.
Qual è l'espressione di j^3?

(d) Definire

$$h_0 = \frac{H_0}{\hbar\omega} \tag{46}$$

e dimostrare l'identità

$$(j^1)^2 + (j^2)^2 + (j^3)^2 = \frac{h_0}{2} \left(\frac{h_0}{2} + 1 \right) \tag{47}$$

e utilizzare il risultato per determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana data.
Di che spettro si tratta?

(e) Supporre ora che la hamiltoniana sia data da

$$H = H_0 + V, \tag{48}$$

dove

$$V = \hbar\lambda\left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1\right). \tag{49}$$

Determinare lo spettro e la degenerazione (supponendo λ ed ω incommensurabili) della hamiltoniana H e interpretare il risultato in termini delle simmetrie del problema. Confrontare con il problema (5).
Come cambia la simmetria del problema in conseguenza dell'aggiunta del termine V?

(f) Supporre che il sistema la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana H si trovi al tempo $t = 0$ nel primo stato eccitato della hamiltoniana H_0, ed inoltre che si trovi in un autostato di j_3 con autovalore $+\frac{\hbar}{2}$. Determinare la probabilità che al tempo t esso venga rivelato in un autostato di j_3 con autovalore $-\frac{\hbar}{2}$.
Qual è l'espressione del potenziale V in termini degli operatori j^a

(g) Dimostrare che esiste un operatore hermitiano J tale che, definito $R(\theta) = \exp i\theta J$, si ha

$$A_i = R(\theta) a_i R^{-1}(\theta), \tag{50}$$

dove $a_i^\dagger$, a_i sono operatori di creazione e distruzione per la hamiltoniana H_0 mentre $A_i^\dagger$, A_i sono operatori di creazione e distruzione per la hamiltoniana H, e determinare J e θ. Notare che il risultato può essere ottenuto senza eseguire alcun calcolo.
Quali operatori possono essere diagonalizzati simultaneamente a H e quali simultaneamente ad H_0?

(26) Considerare una particella in tre dimensioni la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - \vec{A}(\vec{x})\right)\right]^2, \tag{51}$$

dove $\vec{\sigma}$ sono le matrici di Pauli, $\vec{x}$ e $\vec{p}$ sono gli operatori (vettoriali) posizione e impulso, e $\vec{A}(\vec{x})$ è un vettore di funzioni degli operatori posizione.

(a) Determinare, usando la rappresentazione di Heisenberg, $v^i \equiv \frac{d}{dt}x^i$.
Quanto vale l'anticommutatore di due matrici di Pauli?

(b) Dimostrare che la hamiltoniana può essere separata nella somma di una hamiltoniana spaziale $H_x = \frac{m}{2}v^i v^i$ e una hamiltoniana di spin $H_\sigma = -\frac{\hbar B}{2m}\sigma_3$, dove v^i sono gli operatori determinati al punto precedente.
Quanto vale il prodotto di due matrici di Pauli?

Supporre ora che $A(\vec{x})$ sia data da

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{52}$$

con B una costante reale positiva.

(d) Determinare esplicitamente H_σ in questo caso.
Che cos'e' il termine che moltiplica le matrici di Pauli?

(e) Determinare le equazioni del moto alla Heisenberg per gli operatori $\vec{x}$ e $\vec{p}$ e risolvere l'equazione del moto relativa alla terza coordinata x_3.
Quanto valgono i commutatori?

(f) Determinare lo spettro della hamiltoniana H_x, separando il moto lungo l'asse z.
Che hamiltoniana è quella nel piano xy?

(g) Dimostrare che gli operatori x'_i, p'_i

$$p'_1 = p_1 + \frac{B}{2}x_2 \tag{53}$$
$$p'_2 = p_2 + \frac{B}{2}x_1 \tag{54}$$
$$p'_3 = p_3 \tag{55}$$
$$\vec{x}' = \vec{x} \tag{56}$$

soddisfano relazioni di commutazione canoniche. Scrivere la hamiltoniana H_x in termini degli operatori $\vec{x}'$ e $\vec{p}'$, determinare direttamente lo spettro dell'hamiltoniana H'_x cosìottenuta.
Che hamiltoniana è quella lungo l'asse y?

(h) Dimostrare che è uguale a quello della hamiltoniana H di partenza.
Quali sono i valori ammessi nel caso del punto (b)?

(i) Dato un autostato dell'hamiltoniana H_x avente funzione d'onda $\langle\vec{x}|i\rangle = \psi_i(\vec{x})$, dimostrare che esiste una funzione $\Lambda(\vec{x}')$ tale che

$$\psi'_i(\vec{x}') = e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda(\vec{x}')}\psi_i(\vec{x}') \tag{57}$$

è un autostato della stessa hamiltoniana associato allo stesso autovalore di energia, ma scritto nella base canonica Eq. (3-6), e determinare esplicitamente la funzione $\Lambda(\vec{x})$.
Qual è l'equazione agli autovalori soddisfatta dalla ψ'?

(27) Considerare un atomo di idrogeno nello stato fondamentale.

(a) Determinare il valor medio di r^k.
Come è definita la funzione Gamma (fattoriale)?

(b) Determinareil valor medio della posizione radiale, la sua varianza, il valor medio dell'energia potenziale e dell'energia cinetica.
Come dipendono da r queste quantità?

(c) Determinare la distribuzione di probabilità di impulso.
Come si ottiene la funzione d'onda nell spazio degli impulsi.

(d) Determinare il valor medio dell'impulso $\vec{p}$.
Come sono legati l'impulso in coordiate cartesiane e quello in coordinate sferiche?

(28) Considerare un atomo di idrogeno immerso in un campo magnetico, la cui hamiltoniana è data da

$$H = H_0 - \omega L_z\,,$$

dove H_0 è l'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno e $\omega = \frac{eB}{2mc}$ è un accoppiamento con un campo magnetico di intensità B diretto lungo l'asse z.

(a) Dimostrare che gli autostati $|nlm\rangle$ dell'atomo di idrogeno sono anche autostati di questa hamiltoniana, e determinare lo spettro di autovalori di energia e la degenerazione.
Che cosa cambia l'accoppiamento col campo magnetico?

(b) Suppponendo che al tempo $t = 0$ la particella si trovi nello stato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,1\,{-1}\rangle - |211\rangle)$, Determinare la probabilità di trovare il sistema al tempo t negli stati $|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,1\,{-1}\rangle - |211\rangle)$; $|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,1\,{-1}\rangle + |211\rangle)$; oppure $|\phi_3\rangle = |210\rangle$. Qual è l'interpretazione fisica di questi stati?.
Usare la rappresentazione di Schrödinger.

(c) Per lo stato dato al punto precedente, determinare il valor medio dell'operatore momento di dipolo magnetico $\vec{\mu} = \frac{e}{3mc}\vec{L}$ ad ogni tempo t.
Usare la rappresentazione di Heisenberg.

(29) Considerare un sistema di due particelle in tre dimensioni la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} - \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + \frac{1}{2}m_1\omega^2\vec{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1}\omega^2\vec{x}_2^2 + m_2\omega^2\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 \tag{58}$$

(a) Separare il moto del baricentro dal moto relativo e determinare lo spettro del sistema.
A che cosa corrispondono le hamiltoniane del baricentro e relativa?

(b) Supporre che la particella di massa m_1 abbia spin $\frac{1}{2}$ e quella di massa m_2 sia priva di spin. Determinare lo spettro della hamiltoniana

$$H_1 = H_r + \lambda\vec{J} \cdot \vec{S}, \tag{59}$$

dove H_r è la hamiltoniana del moto relativo della domanda precedente, $\vec{S}$ è lo spin totale, e $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, dove $\vec{L}$ è il momento angolare del moto relativo.
Su quale base la hamiltoniana H_1 è diagonale e da quali numeri quantici dipendono i suoi autovalori?.

(c) Determinare nello stato fondamentale della hamiltoniana data il valore della distanza fra le due particelle per cui la densità di probabilità di posizione $\rho(\vec{x}_1, \vec{x}_2)d^3x_1d^3x_2$ è massima.
Si possono scegliere le coordinate in modo che la distanza relativa sia una di esse?

(30) Considerare un oggetto classico puntiforme di massa m che al tempo $t = 0$ si trova in $\vec{x}$ ed al tempo T si trova in $\vec{x}'$.

(a) Determinare l'azione classica in funzione di $\vec{x}$, $\vec{x}'$, T, nel caso libero.
Che cosa si conserva nel moto classico?

(b) Ripetere il calcolo del punto precedente nel caso di potenziale armonico, in una dimensione.
Che forma hanno le leggi del moto classiche in termini delle condizioni iniziali e finali date?

(c) Calcolare in entrambi i casi la derivata dell'azione rispetto a $\vec{x}'$ e verificare che essa fornisce il valore dell'impulso $\vec{p}(T)$.

(31) Considerare una particella libera accoppiata ad un campo elettrico, avente hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - e\vec{E} \cdot x, \tag{60}$$

e definire il corrispondente propagatore $K(\vec{x}', t; \vec{x}, 0)$.

(a) Calcolare il commutatore dell'operatore impulso in rappresentazione di Schrödinger con l'operatore di evoluzione temporale e scrivere il risultato in termini dell'operatore impulso in rappresentazione di Heisenberg.
Come si scrive l'operatore di evoluzione temporale?

(b) Definire il propagatore $K(\vec{p}', t; \vec{p}, 0)$ nello spazio degli impulsi, calcolare l'elemento di matrice del commutatore determinato al punto precedente fra autostati dell'impulso ed utilizzare il risultato per dimostrare che $K(\vec{p}', t; \vec{p}, 0) \neq 0$ se e solo se $\vec{p}' = \vec{p} + e\vec{E}t$.
Che relazione c'è fra propagatore ed operatore di evoluzione temporale?

(c) Determinare se è vero o non è vero che $K(\vec{x}', t; \vec{x}, 0) = K(-\vec{x}', t; -\vec{x}, 0)$ e se è vero o non è vero che $K(\vec{x}', t; \vec{x}, 0) = K(\vec{x}, t; \vec{x}', 0)$
Che forma ha l'elemento di matrice del propagatore fra autostati di energia?

(32) Considerare una particella libera unidimensionale che al tempo $t = 0$ si trova in uno stato di onda piana

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}. \tag{61}$$

(a) Determinare il propagatore $K(\vec{x}', t; \vec{x}, 0)$.
Come è definito il propagatore?

(b) Scrivere la funzione d'onda del sistema al tempo t, $\psi(x,t)$ e verificare che essa può essere ottenuta calcolando l'integrale

$$\psi(x,t) = \int dx' K(\vec{x}', t; \vec{x}, 0)\psi(x,0) \tag{62}$$

usando l'espressione del propagatore ricavata al punto precedente.
Che forma ha l'integrale?

(33) Considerare una particella unidimensionale in un cristallo, libera di nuoversi nella regione $-a < x < a$ ma soggetta a forze di richiamo armoniche al di fuori di questo intervallo. Il potenziale è dato da

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2 & x > a \\ 0 & -a < x < a \\ \frac{1}{2}m\omega^2(x+a)^2 & x < -a \end{cases}. \tag{63}$$

(a) Per un dato valore di energia E, scrivere la soluzione semiclassica nelle tre regioni in cui i due punti di inversione dividono lo spazio, esprimendo la posizione dei punti di inversione in termini di E.
Come sono definiti i punti di inversione?

(b) Determinare lo spettro di energia in approssimazione WKB.
Che forma ha la condizione di quantizzazione?

(c) Determinare lo spettro di energia per un semplice oscillatore armonico in approssimazione WKB.
Come si ottiene l'oscillatore armonico dal caso precedent?

(d) Determinare lo spettro nei limiti $a \to 0$ e $a \to \infty$, confrontare il risultato con spettri unidimensionali noti e interpretarlo fisicamente.
Qual è il parametro che determina la se a è "piccolo" o "grande"?

(34) Considerare un sistema tridimensionale soggetto ad un potenziale idrogenoide schermato

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{e^2}{r} & 0 < r < R \\ -\frac{e^2}{r}e^{-\lambda(r-R)} & r > R \end{cases} \tag{64}$$

(a) Calcolare la correzione al primo ordine all'energia dello stato fondamentale.

(b) Discutere gli andamenti della soluzione trovata quando $\lambda \to 0$ e quando $R \to \infty$.

(35) Considerare nuovamente la hamiltoniana Eq. (1), trattando ora il termine proporzionale a λ come perturbazione.

(a) Determinare la correzione allo stato fondamentale al primo ordine perturbativo.

(b) Determinare la correzione allo stato fondamentale al secondo ordine perturbativo e confrontare con il risultato esatto.

(c) Determinare la correzione perturbativa allo stato fondamentale agli ordini perturbativi successivi.

(36) La carica del nucleo di un atomo idrogenoide aumenta di una unità in seguito ad un decadimento β.

(a) Determinare la variazione di energia dell'elettrone nell'n-esimo stato al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

(b) Determinare esattamente la differenza di energia tra il livello n-esimo di energia per due atomi idrogenoidi per cui la carica del nucleo differisce di una unità e confrontare con il risultato trovato al punto precedente.

(37) Considerare un sistema unidimensionale che si trova in uno stato legato della hamiltoniana H_0 e perturbato da un campo elettrico

$$V_p(x) = -eEx \tag{65}$$

Determinare la perturbazione a tutti i livelli energetici del sistema

(a) al primo ordine perturbativo quando H_0 è la hamiltoniana di una buca di potenziale infinita;

(b) al secondo ordine perturbativo quando H_0 è la hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale, confrontando con il risultato esatto e discutendo quanto vale la correzione ad ordini perturbativi più elevati;

(c) al secondo ordine perturbativo quando H_0 è la hamiltoniana di un potenziale deltiforme (problemi del primo modulo, problema 36 domanda a).

(38) Considerare una particella di massa m in tre dimensioni soggetta ad potenziale armonico isotropo, perturbata da un campo elettrico diretto lungo l'asse z:

$$V_p(\vec{x}) = -eE\hat{z}, \tag{66}$$

dove $\hat{z}$ è l'operatore posizione lungo l'asse z.

(a) Sfruttando i risultati del problema (17), dimostrare che gli elementi di matrice del potenziale perturbante soddisfano

$$\langle nlm|\hat{z}|000\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\delta_{n0}\delta_{l1}\delta_{m0}, \tag{67}$$

dove $|nlm\rangle$ sono autofunzioni di energia e di momento angolare con $E_{nl} = \hbar\omega\left(2n + l + \frac{3}{2}\right)$.

(b) Determinare la perturbazione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine pertubativo.

(39) Considerare nuovamente la hamiltoniana Eq. (2) con $\omega_1 \neq \omega_2$, e considerare il termine proporzionale a $x_1 x_2$ come una perturbazione.

(a) Determinare la correzione al primo ordine all'energia dello stato fondamentale della hamiltoniana imperturbata.

(b) Supponendo $\omega_3 \gg \omega_1$ e $\omega_3 \gg \omega_2$, determinare la degenerazione del primo stato eccitato.

(c) Determinare la correzione al primo ordine all'energia del primo stato eccitato e la degenerazione in presenza della perturbazione.

(d) Confrontare il risultato perturbativo trovato nella domanda precedente con il risultato esatto per l'energia dei primi due stati eccitati, e dimostrare che esso può ottenuto sviluppando al primo ordine il risultato esatto in serie di potenze.

(40) Considerare nuovamente il sistema del problema (29) avente hamiltoniana Eq. (58), e aggiungere alla hamiltoniana relativa una perturbazione della forma

$$H_2 = H_r + D\hat{z}, \tag{68}$$

dove H_r è la hamiltoniana relativa del problema (29), D è una costante reale positiva e $\hat{z}$ è l'operatore posizione lungo l'asse z.

(a) Sfruttando le proprietà di trasformazione sotto parit'a e sotto rotazioni dell'operatore posizione lungo l'asse z, dimostrare che i suoi elementi di matrice fra autostati del momento angolare soddisfano le seguenti identità

$$\langle l'm'|z|lm\rangle = \delta_{mm'}\langle l'm|z|lm\rangle \tag{69}$$

$$(-1)^{l+l'}\langle l'm'|z|lm\rangle = \langle l'm'|-z|lm\rangle. \tag{70}$$

(b) Sfruttando i risultati del problema (17) e del problema (27), dimostrare che

$$\langle 200|z|210\rangle = -3a_0. \tag{71}$$

(c) Sfruttando le identità Eq. (69-71) determinare al primo ordine la perturbazione all'energia del primo stato eccitato della hamiltoniana H_r dovuta al termine proporzionale a D.

(d) Determinare il valor medio dell'operatore $\vec{x}$ nello stato fondamentale della hamiltoniana H_2 del punto precedente al primo ordine perturbativo non-banale (cioè il più basso ordine al quale si trova un risultato diverso da zero). Esprimere il risultato in termini di elementi di matrice dell'operatore dato negli autostati idrogenoidi (senza calcolare la sommatoria)

(41) Considerare una particella unidimensionale in una buca di potenziale infinita, soggetta ad un potenziale corrispondente ad un campo elettrico dipendente dal tempo della forma

$$V(x,t) = -e\mathcal{E}_0 x\Theta(t)e^{-t\tau}, \tag{72}$$

dove τ è una costante reale positiva.

(a) Dimostrare che sotto l'azione di questo potenziale il sistema può subire una transizione fra lo stato fondamentale e qualunque stato eccitato di ordine pari.

(b) Calcolare la probabiltà di transizione fra lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato nel limite $t \to \infty$.

(42) Considerare un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione ω, soggetto ad un campo elettrico dipendente dal tempo della forma

$$V(t,x) = Exe^{-t/\tau}\Theta(t), \tag{73}$$

dove E è una costante reale positiva, x è l'operatore posizione e e Θ è la funzione a gradino (funzione di Heaviside),

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0; \\ 1 & t > 0. \end{cases} \tag{74}$$

Supporre che il sistema sia preparato nello stato fondamentale della hamiltoniana relativa al tempo $t = 0^- = \lim_{\epsilon\to 0} -\epsilon$, cioè subito prima che la pertubazione venga accesa.

(a) Determinare al primo ordine della teoria perturbativa dipendente dal tempo la probabilità che il sistema subisca una transizione a qualunque altro autostato della hamiltoniana imperturbata al tempo finale $t \to \infty$, utilizzando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo al primo ordine.

(b) Dimostrare, usando la rappresentazione di interazione, che per questo sistema l'ampiezza di transizione (esatta) fra lo stato fondamentale al tempo $t = 0$, $|0(t = 0^-)\rangle$, e il primo stato eccitato al tempo $t = \infty$, $|1(t = \infty)\rangle$ è data da

$$\langle 1(t=\infty)|0(t=0^-)\rangle = \lim_{t\to\infty}\langle 0(t=0^-)|a(t)|0(t=0^-)\rangle. \tag{75}$$

(c) Usare il risultato del punto precedente per calcolare l'ampiezza di transizione relativa al punto (a) in modo esatto, e confrontare il risultato con quello perturbativo.

(43) Considerare una particella unidimensionale la cui dinamica è governata dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x); \tag{76}$$

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \tag{77}$$

(a) Determinare lo spettro dell'hamiltoniana.

(b) Sul sistema agisce una perturbazione dipendente dal tempo della forma

$$V(t) = g \exp - \left[t\lambda \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right) \right]. \tag{78}$$

Determinare al primo ordine la probabilità che il sistema preparato al tempo $t = 0$ nello stato fondamentale subisca dopo un tempo t una transizione al primo stato eccitato.

(44) Considerare un sistema di n particelle identiche non interagenti. Supporre che la hamiltoniana del sistema sia data dalla somma di n hamiltoniane indentiche ad un corpo H_i aventi spettro noto:

$$H = \sum_{I=1}^{n} H_i; \qquad H_i|k_i\rangle = E_k|k_i\rangle. \tag{79}$$

(a) Determinare l'energia dello stato fondamentale quando le particelle hanno spin 0, oppure quando hanno spin $\frac{1}{2}$.

(b) Quando $n = 3$ scrivere la funzione d'onda di stato fondamentale per entrambi i valori dello spin.

(45) Considerare un sistema formato da due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ in tre dimensioni confinate all'interno di un parallelepipedo. La dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + V(\vec{x}_1) + V(\vec{x}_2) + \frac{\mu}{\hbar}\vec{B} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2), \tag{80}$$

dove $\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$ e $\vec{s}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione, impulso e spin per le due particelle e μ è una costante reale positiva. Il potenziale $V(\vec{x}_i)$ ha la forma

$$V(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_i^{(j)}| \le a_j \\ V_0 \text{ se } |x_i^{(j)}| > a_j \end{cases}, \tag{81}$$

dove $x_i^{(j)}$ è la j-esima componente dell'operatore posizione per la i-esima particella, $a_1 = a_2 = \frac{a_3}{2}$; $\mu|\vec{B}| \ll E_0$, dove E_0 è l'energia dello stato fondamentale della hamiltoniana spaziale; e $V_0 \to \infty$

(a) Si determinino l'energia, la degenerazione, e la funzione d'onda dello stato fondamentale e del primo stato eccitato del sistema quando $\vec{B} = 0$.

(b) Si determinino l'energia, la degenerazione, e la funzione d'onda dello stato fondamentale e del primo stato eccitato del sistema, ma ora quando $\vec{B} \neq 0$.

(c) Nel caso $\vec{B} \neq 0$ viene eseguita una misura di energia che rivela il sistema nello stato fondamentale, oppure nel primo stato eccitato, e subito dopo una misura della componente lungo l'asse z dello spin totale del sistema. Quali sono i risultati possibili della misura di spin, a seconda dei risultati della precedente misura di energia?

(46) Considerare un sistema di due particelle identiche in una dimensione, con hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + \frac{B}{\hbar} \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \,, \tag{82}$$

dove $\vec{s}_i$ sono gli operatori di spin delle due particelle e B ed ω sono costanti reali positive.

(a) Nel caso di particelle di spin 0 (quindi in assenza del termine di spin) determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e dei primi due livelli eccitati e scrivere la funzione d'onda in termini di funzioni d'onda di particella singola.

(b) Nel caso di fermioni di spin $\frac{1}{2}$, determinare la funzione d'onda completa (spaziale e di spin) per lo stato fondamentale ed il primo livello eccitato del sistema, ed i corrispondenti autovalori di energia e spin, a seconda dei valori dei parametri B ed ω.

(c) Rispondere alla domanda precedente nel caso particolare in cui $B = 0$, ed in particolare determinare la degenerazione degli stati presi in esame, confrontando con il caso in cui $B \neq 0$.

(47) Considerare un sistema formato da tre particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ e di uguale massa m in tre dimensioni, confinate all'interno di un cubo. La dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_3^{\,2}}{2m} + V(\vec{x}_1) + V(\vec{x}_2) + V(\vec{x}_3) - \lambda \left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1 \right) \tag{83}$$

dove $\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$ e $\vec{s}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione, impulso e spin per le tre particelle e λ è una costante reale positiva. Il potenziale $V(\vec{x}_i)$ ha la forma

$$V(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_i^{(j)}| \leq a \\ \infty \text{ se } |x_i^{(j)}| > a \end{cases}, \tag{84}$$

dove $x_i^{(j)}$ è la j-esima componente dell'operatore posizione per la i-esima particella ed a è una costante reale positiva. Determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale della hamiltoniana

(a) se $\lambda \gg \frac{1}{ma^2}$;

(b) se $\lambda \ll \frac{1}{ma^2}$.