PROBLEMI DI FISICA QUANTISTICA

SECONDA PARTE
anno accademico 2024-2025

(1) Per un sistema meccanico d-dimensionale determinare:

   (a) gli elementi di matrice dell'operatore posizione $\vec{x}$ e dell'operatore impulso $\vec{p}$ tra autostati dell'impulso $|\vec{p}\rangle$;
   qual è l'operatore che genera la trasformazione $k_i \to k_i + \delta$, dove k_i è l'i-esima componente dell'impulso?

   (b) le autofunzioni dell'operatore posizione nella base degli autostati dell'impulso $\langle\vec{k}|\vec{x}\rangle$;
   le condizioni di autostato rispetto alle diverse componenti dell'impulso sono indipendenti?

   (c) la relazione tra le espressioni di un vettore di stato generico $|\psi\rangle$ nella base degli autostati della posizione e nella base degli autostati dell'impulso.
   idem: il cambio di base tra autofunzioni della posizione e dell'impulso lungo ciascuna dimensione dipende dalle altre dimensioni?

(2) In uno spazio d-dimensionale:

   (a) determinare il generatore della trasformazione $\vec{k} \to \vec{k} + \hat{n}$, dove $\vec{k}$ è un vettore impulso, e $\hat{n}$ è un qualunque versore (vettore di norma uno), ed esprimere il risultato in termini dell'operatore posizione d-dimensionale $\hat{\vec{x}}$ nello spazio degli impulsi;
   Che differenza c'è fra questo caso e quello della domanda precedente?

   (b) scrivere l'operatore che realizza la trasformazione finita discussa al punto precedente, prima in termini del generatore, e poi esplicitamente nella base degli autostati dell'impulso.
   Che relazione c'è tra trasformazione finita ed infinitesima?

(3) Si consideri una sistema di tre particelle in una dimensione aventi la stessa massa m, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_3^2 + \lambda x_2, \tag{1}$$

dove x_i e p_i sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso delle tre particelle, e ω e λ sono costanti reali positive.

   (a) Nel caso $\lambda = 0$, determinare lo spettro della hamiltoniana, la sua degenerazione, e la funzione d'onda di stato fondamentale.
   Di che hamiltoniana si tratta? Come è fatto lo spettro di una hamiltoniana separabile? Come è definita la degenerazione? Come è fatta la funzione d'onda di una hamiltoniana separabile?

   (b) Scrivere le equazioni di Heisenberg per gli operatori x_i e p_i nel caso generale in cui $\lambda \neq 0$ e risolverle nel caso $\lambda = 0$.
   Che equazioni sono?

   (c) Determinare lo spettro, la degenerazione e la funzione d'onda di stato fondamentale della hamiltoniana H_0 nel caso $\lambda \neq 0$.
   Si riece a riscrivere la hamiltonana in termini di una hamiltoniana nota?

   (d) Determinare i valori medi degli operatori x_i e p_i in qualunque autostato della hamiltoniana.
   Qual è la trasformazione che lega le due hamiltoniane?

(e) Determinare l'operatore $\mathcal{O}_\lambda$ tale che $\mathcal{O}_\lambda|0_0\rangle = |0_\lambda\rangle$, dove $|0_0\rangle$ e $|0_\lambda\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale della hamiltoniana Eq. (1) quando $\lambda = 0$ e quando $\lambda \neq 0$.
Qual è l'operatore che realizza la trasformazione che lega le due hamiltoniane?

(4) Considerare una particella tridimensionale la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\left[\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}(x_1)^2 + \left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)x_1x_2 + \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}(x_2)^2 + \omega_3^2(x_3)^2\right] \tag{2}$$

dove x_1, x_2, x_3 sono le tre componenti dell'operatore posizione per la particella e $\vec{p}$ è il corrispondente vettore di operatori impulso

(a) Confrontare spettro, degenerazione e autofunzione di stato fondamentali per la hamiltoniana Eq. (2) quando $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ con quelli della hamiltoniana Eq. (1) quando $\lambda = 0$.
C'è differenza fra questo caso e quello della domanda precedente?

(b) Supponendo ora $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, ma $\omega_3 \neq \omega$ determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana, nel caso generale in cui ω e ω_3 sono incommensurabili.
Come si calcola la degenerazione?

(c) Determinare lo spettro, la degenerazione e la funzione d'onda di stato fondamentale della hamiltoniana $H' = T_3^{-1}(\delta)HT_3(\delta)$, dove $T_3(\delta)$ è l'operatore che realizza una traslazione di lunghezza δ lungo l'asse x_3:

$$T_3(\delta) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\delta p_3\right), \tag{3}$$

sempre nel caso in cui $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, ma $\omega_3 \neq \omega$.
Come sono legati autifunzioni e autovalori di hamiltoniane unitariamente equivalenti?

(d) Nel caso in cui $\omega_1 \neq \omega_2$ separare la hamiltoniana Eq. (1) nella somma di tre hamiltoniane commutanti eseguendo una trasformazione di coordinate della forma $x'_i = V_{ij}x_j$. Determinare la matrice V e determinare gli impulsi p'_i che soddisfano le relazioni di commutazione canoniche $[p_i, x_j] = -i\hbar\delta_{ij}$. Determinare infine spettro e degenerazione della hamiltoniana.
Pensando a x_i come vettore colonna, qual è la trasformazione che separa il problema?

(5) Considerare una sistema di due particelle unidimensionali, la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \hbar\omega\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2\right) + \hbar\lambda\left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1\right) \tag{4}$$

dove a_i è un operatore che agisce sullo spazio degli stati fisici della i-esima particella, e gli a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \tag{5}$$

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \tag{6}$$

per ogni i, j.

(a) determinare la più generale trasformazione lineare degli operatori a_i che preserva le relazioni di commutazione;
Che condizione deve soddisfare la trasformazione?

(b) utlizzare il risultato del punto precedente per determinare lo spettro della hamiltoniana.
Che relazione c'è tra gli autovalori di energia e la hamiltoniana scritta nella forma Eq. (4)?

(c) Esprimere i ket di stato fondamentale e primo stato eccitato della hamiltoinana in termini dei ket di stato associati agli autostati della hamiltoniana $H_0 = \hbar\omega\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2\right)$.
Che relazione c'è fra gli operatori di creazione e distruzione associati alle due hamiltoniane?

(d) Suppore che al tempo $t = 0$ il sistema sia preparato nello stato $|\psi\rangle = a_1^\dagger|0\rangle$ dove $|0\rangle$ è lo stato fondamentale della hamiltoniana, e determinare la probabilità che al tempo t = T il sistema venga rivelato nello stato $|\phi\rangle = a_2^\dagger|0\rangle$.
Che forma ha la matrice della hamiltoniana nel sottospazio dei due stati inziale e finale?

(6) (a) Dimostrare che l'energia cinetica per un sistema di due corpi $T = \frac{1}{2m_1}\vec{p}_1^{\,2} + \frac{1}{2m_2}\vec{p}_2^{\,2}$ in termini dell'impulso totale $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, dell'impulso relativo $\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1+m_2}$, della massa totale $M = m_1 + m_2$ e della massa ridotta $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$ prende la forma $T = \frac{1}{2M}\vec{P}^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{p}^{\,2}$.
Si può fare la stessa manipolazione che nel caso classico?

(b) Discutere se il passaggio a coordinate baricentrali e relative sia l'unico che separa un problema centrale.
Quali condizioni deve soddisfare il cambio di coordinate?

(7) Considerare una coppia di particelle in tre dimensioni aventi la stessa massa m e cariche elettriche q_1 e q_2, con dinamica descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = H_1 + H_2 + V_{12} \tag{7}$$

dove H_i sono hamiltoniane di singola particella aventi la forma

$$H_i = \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} - q_i\vec{E}\cdot\vec{x}_i + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{x}_i^{\,2} \tag{8}$$

e il potenziale di interazione a due corpi V_{12} è dato da

$$V_{12} = -m\omega^2\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2; \tag{9}$$

$\vec{E}$ (campo elettrico) è un vettore (costante) a componenti reali e q_i sono costanti reali positive.

(a) Separare l'hamiltoniana H_0 in una parte baricentrale ed una parte relativa e dimostrare che commutano.
Che forma assume la hamiltoniana in termini di coordinate baricentrali e relative?

(b) Determinare spettro e degenerazione della hamiltoniana relativa nel caso in cui $q_1 = q_2$.
Si può separare in termini di problemi unidimensionali noti?

(c) Discutere se sia possibile determinare esattamente lo spettro della Hamiltoniana baricentrale e se sia continuo o discreto.
Di che hamiltoniana si tratta?

(d) Determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana relativa nel caso $q_1 \neq q_2$ e discutere se siano diversi da quelli trovati nel caso $q_1 = q_2$.
C'è un cambio di coordinate che permette di elminare l'accoppiamento con il campo elettrico?

(e) Nel caso del punto precedente determinare i valori medi degli operatori posizione ed impulso relativi in un qualunque autostato della hamiltoniana.
Quanto calgono i valori medi di posizione e impulso negli autostati di oscillatore armonico?

(8) Considerare un sistema formato da n particelle di uguale massa m ed una particella di massa M, in una dimensione spaziale, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p_0^2}{2M} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^2}{2m} + V(x_i, x_0)\right), \tag{10}$$

dove x_i, p_i, x_0, p_0 sono gli operatori posizione e impulso rispettivamente per le n particelle di massa m e per la particella di massa M, ed il potenziale $V(x_i, x_0)$ ha la forma

$$V(x_i, x_0) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_i - x_0| \leq L \\ V_0 \text{ se } |x_i - x_0| > L \end{cases}, \tag{11}$$

dove $V_0 \to \infty$ e L è una costante reale e positiva.

(a) Separare la hamiltoniana H_0 nella somma di $n+1$ hamiltoniane commutanti, considerando $\frac{m}{M}$ trascurabile ($\frac{m}{M} \ll 1$).
Qual è l'espressione delle coordinate baricentrali e relative?

(b) Determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato per la hamiltoniana data.
Qual è lo spettro baricentrale, e quale lo spettro delle hamiltoniane relative?

(c) Scrivere (senza risolverle) le equazioni del moto alla Heisenberg per il sistema separato secondo la prima domanda.
Come si scrive un potenziale tipo buca usando la funzione a gradino di Heaviside?

(9) Considerare una coppia di particelle in tre dimensioni aventi la stessa massa m e cariche elettriche q_1 e q_2, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 - q_1\vec{E} \cdot \vec{x}_1 - q_2\vec{E} \cdot \vec{x}_2, \tag{12}$$

dove $\vec{x}_i$ e $\vec{p}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso delle due particelle, e $\vec{E}$ (campo elettrico) è un vettore (costante) di numeri reali.

(a) Separare l'hamiltoniana in una parte baricentrale ed una parte relativa e dimostrare che commutano.
Qual è l'espressione delle coordinate baricentrali e relative? Quali sono le loro regole di commutazione?

(b) Sfruttando il risultato della domanda precedente, determinare le equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg (senza risolverle) per gli operatori posizione ed impulso e per l'operatore

$$\vec{D} = q_1\vec{x}_1 + q_2\vec{x}_2, \tag{13}$$

(momento di dipolo elettrico).
Quanto valgono i commutatori di tutte le variabili date con la hamiltoniana?

(c) Nel caso $q_1 = q_2$, determinare il valor medio di una misura del momento di dipolo al tempo t in termini di opportune condizioni iniziali al tempo $t = 0$, specificando quante e quali condizioni iniziali sono necessarie per determinare completamente il risultato.
Da che coordinate canoniche dipende il momento di dipolo in questo caso?

(10) (a) Per un sistema *bidimensionale*, determinare l'operatore (hermitiano) impulso radiale, ed determinare l'operatore energia cinetica esplicitamente in coordinate polari (r, θ),

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{14}$$

(b) Dimostrare che in d dimensioni

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\dagger = -\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{d-1}{r}\right) \tag{15}$$

attraverso il calcolo dell'elemento di matrice $\langle\psi|\tilde{p}_r|\phi\rangle$ nella rappresentazione delle coordinate, dove $\tilde{p}_r = -i\hbar\frac{\partial}{\partial r}$.
Qual è l'espressione dell'elemento di volume in d dimensioni?

(c) Separare l'operatore cinetico in d dimensioni in parte radiale e parte angolare, sfruttando l'espresione del laplaciano in d dimensioni

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{L^2}{r^2}, \tag{16}$$

dove L^2 è un operatore che agisce solo sulle variabili angolari.
Qual è l'espressione della derivata radiale?

(11) Considerare una trasformazione generale di coordinate in d dimensioni $\vec{x} \to \vec{\xi}$, con $\xi_i = \xi_i(x_j)$.

(a) Determinare l'espressione della delta di Dirac d dimensionale $\delta^{(d)}(\vec{\xi}-\vec{\alpha})$, dove $\vec{\alpha}$ è un vettore (costante) d-dimensionale in termini della delta di Dirac $\delta^{(d)}(\vec{x})$, definita come

$$\delta^{(d)}(\vec{x}) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_n), \tag{17}$$

dove $x_1, \dots, x_d$ sono le d componenti del vettore $\vec{x}$.
Come si trasforma la delta unidimensionale sotto un cambio di coordinate?

(b) Esprimere la delta di Dirac d-dimensionale $\delta^{(d)}(\vec{x}-\vec{x}_0) = \delta(x^1-x_0^1)\delta(x^2-x_0^2)\dots\delta(x^d-x_0^d)$ in coordinate ipersferiche, definite come

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi_1 \\ r\sin\phi_1\cos\phi_2 \\ \dots \\ r\sin\phi_1\sin\phi_2\dots\sin\phi_{d-1} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Come è fatta la misura di integrazione in coordinate ipersferiche?

(12) Determinare ad ogni tempo t il valor medio del vettore posizione $\langle\vec{x}\rangle$ e del vettore impulso $\langle\vec{p}\rangle$ per un sistema che al tempo zero ha

$$\langle\vec{x}\rangle = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \langle\vec{p}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ p_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

e la cui dinamica è descritta dalla Hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \vec{B}\cdot\vec{L}, \tag{20}$$

dove $\vec{B}$ è il vettore costante

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

(13) Considerare un sistema avente hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\kappa}{2I}(\vec{L})^2 + \hbar\vec{B}\cdot\vec{L} \tag{22}$$

dove sono gli operatori di momento angolare, I e κ sono costanti reali positive, e $\vec{B}$ è un vettore tridimensionale a componenti reali (non necessariamente positive).

(a) Determinare lo spettro dell'hamiltoniana data e la sua degenerazione, sia quando $\vec{B} = 0$ che quando $\vec{B} \neq 0$.

(b) Scrivere le equazioni di Heisenberg per gli operatori $\vec{L}$, $\vec{x}$ e $\vec{p}$.

(c) Supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi in uno stato sovrapposizione equiprobabile del primo e del secondo livello eccitato della hamiltoniana H_0. Determinare la probabilità che al tempo t esso si trovi nella sovrapposizione degli stessi due stati ortogonale a quella in cui si trova al tempo $t = 0$.

(14) Considerare gli autostati del momento angolare $|lm\rangle$.

(a) Calcolare il valor medio in un autostato generico degli operatori L_x, L_y, L_x^2 ed L_y^2.

(b) Usare il risultato della domanda precedente per calcolare l'indeterminazione di L_x, L_y e il prodotto $\Delta L_x \Delta L_y$ in ogni autostato e confrtontare il risultato con il principio di indeterminazione.

(c) Definire le matrici $(2l + 1) \times (2l + 1)$

$$\bar{L}^i_{mm'} \equiv \langle lm|L^i|lm'\rangle \tag{23}$$

e calcolare la traccia del prodotto di due di queste matrici, $\mathrm{Tr}(\bar{L}^i \bar{L}^j)$, con $i \neq j$.

(15) Considerare il sistema della domanda (4) con hamiltoniana Eq. (2).

(a) Scrivere le equazioni del moto alla Heisenberg per gli operatori di momento angolare L_i. Discutere se siano conservati o meno nei tre casi $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$, $\omega_1 = \omega_2 \neq \omega_3$, $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3$.

(b) Nel caso $\omega_1 = \omega_2 \neq \omega_3$ al tempo $t = 0$ viene eseguita una misura di energia che rivela il sistema nello stato fondamentale. Ad un qualunque tempo successivo $t > 0$ viene eseguita una misura di L_z. Quali sono i possibili risultati di questa misura?

(16) Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\left(\vec{L} + \vec{B}\right)^2}{2I}, \tag{24}$$

dove $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ sono gli operatori di momento angolare, I è una costante reale positiva, e $\vec{B}$ è un vettore tridimensionale a componenti reali (non necessariamente positive).

(a) Determinare le equazioni del moto alla Heisenberg per gli operatori $\vec{L}$ per un sistema soggetto alla hamiltoniana H..

(b) Determinare gli autostati ed autovalori dell'hamiltoniana H Eq. (1) e la loro degenerazione, sia quando $\vec{B} = 0$ sia quando $\vec{B} \neq 0$.

(c) Supporre che il vettore $\vec{B}$ sia diretto lungo l'asse z. Determinare la probabilità che se il sistema descritto dall'hamiltoniana al tempo $t = 0$ si trova nello stato

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|11\rangle + |1 - 1\rangle\right) \tag{25}$$

al tempo t esso venga rivelato nello stato

$$|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|11\rangle - |1 - 1\rangle\right), \tag{26}$$

dove $|lm\rangle = |1 \pm 1\rangle$ sono autostati del momento angolare.
Qual è l'interpretazione fisica degli stati $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$?

(d) Supporre ora che il sistema sia posto in un sistema di riferimento rotante, attorno ad un asse parallelo a $\vec{B}$, con pulsazione ω. Determinare lo spettro di energia nel sistema rotante se nel sistema a riposo l'hamiltoniana è la H Eq. (24).

(17) Considerare uno stato $|0\rangle$ avente funzione d'onda

$$\langle \vec{x}|0\rangle = \psi_0(\vec{x}) = f(r), \tag{27}$$

con $r = |\vec{x}|$, ed i tre stati $|i\rangle$ aventi funzione d'onda

$$\langle \vec{x}|i\rangle = \psi_i(\vec{x}) = x^i \psi_0(\vec{x}). \tag{28}$$

(a) Dimostrare che $\psi_0(\vec{x})$ è un autostato di tutte le componenti L^i del momento angolare e dunque anche di L^2 e determinare l'autovalore corrispondente.

(b) Dimostrare che $\psi_i(\vec{x})$ è un autostato di L_i e determinare l'autovalore corrispondente.

(c) Calcolare il commutatore $[L_i, [L_i, x^j]]$ ed utilizzare il risultato per dimostrare che $\psi_i(\vec{x})$ sono tutti autostati di L^2 e determinare l'autovalore corrispondente.

(18) Considerare lo spazio degli stati fisici avente per vettori di base i tre stati $|i\rangle$ Eq. (28).

(a) Determinare le matrici che rappresentano gli operatori di momento angolare L^i in questo spazio, ossia

$$L^i_{jk} = \langle j|L^i|k\rangle. \tag{29}$$

(b) Diagonalizzare l'operatore $L_z \equiv L^3$ in questo spazio e determinare la matrice di passaggio fra la base degli stati Eq. (28) e la base in cui L_z è diagonale.

(c) Determinare gli elementi di matrice di tutt'e tre gli operatori L^i nella base in cui L_z è diagonale *senza* usare la matrice di cambiamento di base determinata al punto precedente, ma sfruttando le relazioni di commutazione fra ghli operatori L^i.

(d) Determinare in questa base gli autostati dell'operatore $\vec{n} \cdot \vec{L}$, dove $\vec{n}$ è un asse qualunque, in termini degli angoli θ, ϕ che determinano la direzione di $\vec{n}$.

(19) Considerare un stato $|\psi\rangle$ al tempo $t = 0$ tale che

$$L^2|\psi\rangle = 2\hbar^2|\psi\rangle \tag{30}$$

$$\frac{L_x + L_y}{\sqrt{2}}|\psi\rangle = \hbar|\psi\rangle\,. \tag{31}$$

(a) Determinare $|\psi\rangle$.

(b) Sia $H = \alpha L^2 + \beta L_z$, con α e β parametri reali. Determinare, al tempo t generico, $|\psi, t\rangle$ e $\langle L_i\rangle_t$.

(20) Considerare un sistema di spin $\frac{1}{2}$.

(a) Determinare la matrice dell'operatore spin lungo una direzione $\vec{n}$ qualunque nella base degli autostati di s_z, , in termini degli angoli θ, ϕ che determinano la direzione di $\vec{n}$.

(b) Determinare nella stessa base l'operatore di proiezione dello spin lungo $\vec{n}$.

(c) Determinare, sempre nella stessa base, gli autostati dello spin lungo $\vec{n}$.

(d) Supporre che sia stata eseguita una misura di spin lungo l'asse $\vec{n}$ che ha dato come risultato $s_{\vec{n}} = +\frac{1}{2}$. Determinare le probabiltà che una misura di spin lungo l'asse z immediatamente successiva dia come risultato $\pm\frac{1}{2}$.

(e) Definire la quantitá $\vec{v}$ le cui componenti sono date da

$$v^i \equiv \langle\psi|s^i|\psi\rangle, \tag{32}$$

dove $|\psi\rangle$ è uno stato qualunque di spin $\frac{1}{2}$, e s^i sono gli operatori di spin. Eseguire una rotazione di angolo θ attorno all'asse $\vec{n}$ dello stato $|\psi\rangle$:

$$|\psi'\rangle = R^{\theta}_{\vec{n}}|\psi\rangle. \tag{33}$$

Determinare come si trasforma $\vec{v}$, ossia definito

$$v'_i = \langle\psi'|s^i|\psi'\rangle, \tag{34}$$

determinare la matrice M_{ij} tale che

$$v'_i = M_{ij}v_j. \tag{35}$$

(21) Considerare un sistema di spin $\frac{1}{2}$ soggetto alla hamiltoniana

$$H = \vec{B}\cdot\vec{\sigma}, \tag{36}$$

dove $\vec{B}$ è un vettore a componenti reali. Al tempo $t = 0$ viene eseguita una misura di spin lungo l'asse z, che dà come risulato $s_z = +\frac{1}{2}$

(a) Determinare lo stato del sistema ad ogni tempo t, espresso nella base degli autostati di $\hat{s}_z$.

(b) Determinare le probabilità dei risultati di una misura di spin lungo l'asse z ad un qualunque tempo t.

(c) Come cambia la risposta alle domande (a-b) se si scambia il ruolo del vettore $\vec{B}$ e dell'asse z, cioè la hamiltoniana è data da $H = B_z$ e al tempo $t = 0$ si misura lo spin lungo l'asse $\vec{B}$?

(d) Determinare il valor medio dello spin $\vec{s}(t) = \langle\hat{\vec{s}}\rangle$ ad ogni tempo t.

(22) Determinare i coefficienti di Clebsch-Gordan per la composizione di due spin 1.

(23) Considerare un sistema formato da due particelle di uguale massa m e spin $\frac{1}{2}$ in tre dimensioni confinate all'interno di un parallelepipedo, ossia aventi dinamica descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + V(\vec{x}_1) + V(\vec{x}_2) + \frac{\lambda}{\hbar^2}\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2 \tag{37}$$

dove $\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$ $\vec{s}_i$ e sono rispettivamente gli operatori posizione, impulso e spin per le due particelle e il potenziale $V(\vec{x}_i)$ ha la forma

$$V(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_i^{(j)}| \le a_j \\ V_0 \text{ se } |x_i^{(j)}| > a_j \end{cases}, \tag{38}$$

dove $V_0 \to \infty$, $x_i^{(j)}$ è la j-esima componente dell'operatore posizione per la i-esima particella e a_i sono costanti reali positive.

(a) Determinare lo spettro della hamiltoniana H.

(b) Determinare la degenerazione dello stato fondamentale e dei primi due stati eccitati nel caso $a_1 = a_2 = a_3$, a seconda del valore di λ.

(c) Rispondere nuovamente alla due domande precedenti, ma supponendo ora che si tratti di particelle di spin 1.

Supporre ora che la hamiltoniana sia data da

$$H_1 = H + \frac{\mu}{\hbar}\vec{B} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \tag{39}$$

dove H è data dalla Eq. (37) μ è una costante reale positiva e $\vec{B}$ è il vettore a componenti reali $\vec{B} = (B, 0, 0)$.

(d) Rispondere nuovamente alle prime due domande in questo caso.

(e) Determinare la probabilità che una misura dello spin della prima particella lungo l'asse z dia il risultato $s_1^z = \frac{1}{2}$, se il sistema si trova nello stato fondamentale (supponendo $\mu B \ll \lambda$).

(f) La misura del punto precedente viene effettuata al tempo $t = 0$. Determinare la probabilità che al tempo T una seconda misura di spin per la prima particella dia lo stesso risultato.

(24) Considerare un sistema di tre particelle di spin $\frac{1}{2}$ la cui hamiltoniana è data da

$$H_s = -\lambda \left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3\right), \tag{40}$$

dove λ è una costante reale positiva.

(a) Determinare lo spettro della hamiltoniana e la degenerazione di ciascuno stato.

(b) Determinare le funzioni d'onda dello stato fondamentale.

(25) Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = H_1 + H_2 \tag{41}$$

$$H_1 = \hbar\omega a_1^\dagger a_1; \qquad H_2 = \hbar\omega a_2^\dagger a_2 \tag{42}$$

e gli a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \tag{43}$$

per ogni i, j, mentre

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}. \tag{44}$$

(a) Definire i tre operatori

$$j^a = \frac{\hbar}{2} \sum_{i,j=1}^{2} a_i^\dagger \sigma_{ij}^a a_j, \tag{45}$$

dove σ_{ij}^a è la a–esima matrice di Pauli di componenti i, j, e determinare le relazioni di commutazione $[j^a, j^b]$ fra qualunque coppia di questi operatori. Normalizzare le matrici di Pauli in modo che abbiano autovalori ± 1.

(b) Determinare quali degli operatori j^a possono essere diagonalizzati simultaneamente alla hamiltoniana H_0.

(c) Scrivere gli autostati della hamiltoniana H_0 Eq. (1) nella base in cui sono diagonali H_1 e H_2 in termini degli autostati di H_1 e H_2. Dimostrare che in questa base è anche diagonale l'operatore j^3 e determinarne lo spettro.

(d) Definire

$$h_0 = \frac{H_0}{\hbar\omega} \tag{46}$$

e dimostrare l'identità

$$(j^1)^2 + (j^2)^2 + (j^3)^2 = \frac{h_0}{2}\left(\frac{h_0}{2} + 1\right) \tag{47}$$

e utilizzare il risultato per determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana data.

(e) Supporre ora che la hamiltoniana sia data da
$$H = H_0 + V, \tag{48}$$
dove
$$V = \hbar\lambda \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 \right). \tag{49}$$
Determinare lo spettro e la degenerazione (supponendo λ ed ω incommensurabili) della hamiltoniana H e interpretare il risultato in termini delle simmetrie del problema. Confrontare con il problema (5).

(f) Supporre che il sistema la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana H si trovi al tempo $t = 0$ nel primo stato eccitato della hamiltoniana H_0, ed inoltre che si trovi in un autostato di j_3 con autovalore $+\frac{\hbar}{2}$. Determinare la probabilità che al tempo t esso venga rivelato in un autostato di j_3 con autovalore $-\frac{\hbar}{2}$.

(g) Dimostrare che esiste un operatore hermitiano J tale che, definito $R(\theta) = \exp i\theta J$, si ha
$$A_i = R(\theta) a_i R^{-1}(\theta), \tag{8}$$
dove $a_i^\dagger$, a_i sono operatori di creazione e distruzione per la hamiltoniana H_0 Eq. (1) mentre $A_i^\dagger$, A_i sono operatori di creazione e distruzione per la hamiltoniana H Eq. (6), e determinare J e θ. Notare che il risultato può essere ottenuto senza eseguire alcun calcolo.

(26) Considerare una particella in tre dimensioni la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana
$$H = \frac{1}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \vec{A}(\vec{x}) \right) \right]^2, \tag{50}$$
dove $\vec{\sigma}$ sono le matrici di Pauli, $\vec{x}$ e $\vec{p}$ sono gli operatori (vettoriali) posizione e impulso, e $\vec{A}(\vec{x})$ è un vettore di funzioni degli operatori posizione.

(a) Determinare, usando la rappresentazione di Heisenberg, $v^i \equiv \frac{d}{dt} x^i$.

(b) Dimostrare che la hamiltoniana può essere separata nella somma di una hamiltoniana spaziale $H_x = \frac{m}{2} v^i v^i$ e una hamiltoniana di spin $H_\sigma = -\frac{\hbar B}{2m}\sigma_3$, dove v^i sono gli operatori determinati al punto precedente.

Supporre ora che $A(\vec{x})$ sia data da
$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{51}$$
con B una costante reale positiva.

(d) Determinare esplicitamente H_σ in questo caso.

(e) Determinare le equazioni del moto alla Heisenberg per gli operatori $\vec{x}$ e $\vec{p}$ e risolvere l'equazione del moto relativa alla terza coordinata x_3.

(f) Determinare lo spettro della hamiltoniana H_x, separando il moto lungo l'asse z.

(g) Dimostrare che gli operatori x_i', p_i'
$$p_1' = p_1 + \frac{B}{2} x_2 \tag{52}$$
$$p_2' = p_2 + \frac{B}{2} x_1 \tag{53}$$
$$p_3' = p_3 \tag{54}$$
$$\vec{x}' = \vec{x} \tag{55}$$

soddisfano relazioni di commutazione canoniche. Scrivere la hamiltoniana H_x in termini degli operatori $\vec{x}'$ e $\vec{p}'$, determinare direttamente lo spettro dell'hamiltoniana H_x' cosìottenuta.

(h) Dimostrare che è uguale a quello della hamiltoniana H di partenza.

(i) Dato un autostato dell'hamiltoniana H_x avente funzione d'onda $\langle\vec{x}|i\rangle = \psi_i(\vec{x})$, dimostrare che esiste una funzione $\Lambda(\vec{x}')$ tale che

$$\psi_i'(\vec{x}') = e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda(\vec{x}')}\psi_i(\vec{x}') \tag{56}$$

è un autostato della stessa hamiltoniana associato allo stesso autovalore di energia, ma scritto nella base canonica Eq. (3-6), e determinare esplicitamente la funzione $\Lambda(\vec{x})$.

(27) Considerare un atomo di idrogeno nello stato fondamentale.

(a) Determinare il valor medio di r^k.

(b) Determinareil valor medio della posizione radiale, la sua varianza, il valor medio dell'energia potenziale e dell'energia cinetica. Confrontare con il punto (c) del problema precedente.

(c) Determinare la distribuzione di probabilità di impulso.

(d) Determinare il valor medio dell'impulso $\vec{p}$.

(28) Considerare un atomo di idrogeno immerso in un campo magnetico, la cui hamiltoniana è data da

$$H = H_0 - \omega L_z\,,$$

dove H_0 è l'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno e $\omega = \frac{eB}{2mc}$ è un accoppiamento con un campo magnetico di intensità B diretto lungo l'asse z.

(a) Dimostrare che gli autostati $|nlm\rangle$ dell'atomo di idrogeno sono anche autostati di questa hamiltoniana, e determinare lo spettro di autovalori di energia e la degenerazione.

(b) Suppponendo che al tempo $t = 0$ la particella si trovi nello stato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,1\,{-1}\rangle - |211\rangle)$, Determinare la probabilità di trovare il sistema al tempo t negli stati $|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,1\,{-1}\rangle - |211\rangle)$; $|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,1\,{-1}\rangle + |211\rangle)$; oppure $|\phi_3\rangle = |210\rangle$. Qual è l'interpretazione fisica di questi stati?.

(c) Per lo stato dato al punto precedente, determinare il valor medio dell'operatore momento di dipolo magnetico $\vec{\mu} = \frac{e}{3mc}\vec{L}$ ad ogni tempo t.

(29) Considerare un sistema di due particelle in tre dimensioni la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} - \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + \frac{1}{2}m_1\omega^2\vec{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1}\omega^2\vec{x}_2^2 + m_2\omega^2\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2 \tag{57}$$

(a) Separare il moto del baricentro dal moto relativo e determinare lo spettro del sistema.

(b) Supporre che la particella di massa m_1 abbia spin $\frac{1}{2}$ e quella di massa m_2 sia priva di spin. Determinare lo spettro della hamiltoniana

$$H_1 = H_r + \lambda\vec{J}\cdot\vec{S}, \tag{58}$$

dove H_r è la hamiltoniana del moto relativo della domanda precedente, $\vec{S}$ è lo spin totale, e $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, dove $\vec{L}$ è il momento angolare del moto relativo.

(c) Determinare nello stato fondamentale della hamiltoniana Eq. (1) il valore della distanza fra le due particelle per cui la densità di probabilità di posizione $\rho(\vec{x}_1, \vec{x}_2)d^3x_1d^3x_2$ è massima.