PROBLEMI DI FISICA QUANTISTICA

PRIMA PARTE
anno accademico 2025-2026

(1) Si consideri una molecola che incide su uno schermo, diviso in quattro cellette, ed equipaggiato da un rivelatore che permette di vedere in quale delle cellette incide la molecola. I quattro stati corrispondenti alla rivelazione della molecola in ciascuna delle quattro cellette sono $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$. La molecola è precedentemente passata attraverso uno schermo con due fenditure, A e B. Quando solo la fenditura A è aperta la molecola si trova nello stato

$$|\psi_A\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|00\rangle + i\sqrt{\frac{1}{6}}|01\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|10\rangle - i\sqrt{\frac{1}{6}}|11\rangle. \qquad (1)$$

Invece quando solo la fenditura B è aperta la molecola si trova nello stato

$$|\psi_B\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|00\rangle + i\sqrt{\frac{1}{6}}|01\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|10\rangle + i\sqrt{\frac{1}{6}}|11\rangle. \qquad (2)$$

Quando sono aperte entrambe le fenditure il sistema si trova in una sovrapposizione equiprobabile e senza ulteriori fasi relative dei due stati.

(a) Qual è la probabilità che la molecola venga rivelata in ciascuna delle quattro cellette quando è aperta l'una o l'altra delle due fenditure?

(b) Qual è la probabilità che la molecola non venga rivelata nella prima celletta?

(c) Qual è la probabilità che la molecola venga rivelata in ciascuna delle quattro cellette quando sono aperte entrambe le fenditure?

(d) Vi è una diversa sorgente di molecole, con diverse caratteristiche fisiche, tale per cui quando è aperta la fenditura A le molecole si trovano nello stato $|\psi'_A\rangle = -|\psi_A\rangle$, ma quando è aperta la fenditura B le molecole si trovano nello stato $|\psi'_B\rangle = |\psi_B\rangle$. In questo nuovo caso cambiano le risposte alle due domande precedenti, e se sì, come?

(2) Nella situazione del problema precedente, si supponga che la risoluzione del rivelatore sia inferiore: quando si misura la molecola sullo schermo, è solo possibile dire se la molecola è stata rivelata in una coppia di cellette adiacenti. L'esperimento viene ripetuto molte volte, spostando il rivelatore: inizialmente rivela se la molecola abbia colpito lo schermo nelle prime due cellette. Poi viene spostato, e rivela se la molecola lo abbia colpito nella seconda o terza celletta. Infine viene spostato ancora e rivela se la molecola lo abbia colpito nella terza o quarta celletta

(a) Supponendo aperta solo la fenditura A, qual è la probabilità che la molecola venga rivelata o meno, con ciascuna delle tre posizioni del rivelatore?

(b) Sempre supponendo aperta solo la fenditura A, è possibile determinare completamente la probabilità che la molecola incida in corrispondenza di ciascuna delle quattro cellette, effettuando un numero sufficientemente grande di misure?

(3) Si supponga ora che, sempre nella situazione delle due domande precedenti, il rivelatore sullo schermo sia in grado esclusivamente di determinare se la molecola incide nella parte alta dello schermo (prime due cellette) o nella parte bassa (ultime due cellette).

(a) In quali e quanti stati si può trovare il sistema in questo caso?

(b) Qual è la probabilità dei risultati delle misure a seconda che siano aperte solo la fenditura A, solo la fenditura B o entrambe le fenditure?

(c) Potendo effettuare un numero arbitrariamente grande di misure con aperta l'una, l'altra o entrambe le fenditure, è possibile determinare la fase relativa delle sovrapposizioni di stati in cui si trova il sistema a seconda che sia aperta la fenditura A o la fenditura B?

(4) *[Esame Febbraio 2, a.a. 2023/24, domande 1-3].*
Considerare un sistema quantistico che può trovarsi in quattro stati esaustivi ed esclusivi $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ (sistema di due qubit) . Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato

$$|\psi_0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}|00\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|01\rangle\right) + \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}|10\rangle + i\sqrt{\frac{1}{3}}|11\rangle\right). \tag{3}$$

(a) Determinare la probabilità che il sistema venga rivelato in ciascuno dei quattro stati dati, e lo stato in cui viene rivelato il sistema se viene effettuata una misura immediatamente successiva.

(b) Determinare la probabilità che una misura del primo qubit dia come risultato 0, ossia la probabilità che una misura riveli il sistema in uno stato $|q_1 q_2\rangle$ con $q_1 = 0$.

(c) Determinare la probabilità che una misura del secondo qubit dia come risultato 0, ossia la probabilità che una misura riveli il sistema in uno stato $|q_1 q_2\rangle$ con $q_2 = 0$.

(5) *[Esame Febbraio 2, a.a. 2019/20, domande 1-3].*
Considerare ora un sistema quantistico che può trovarsi in quattro stati esaustivi ed esclusivi, indicati come $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$, e considerare gli stati del sistema

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[|00\rangle + (1+i)|01\rangle\right] \tag{4}$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[i|00\rangle + |10\rangle\right], \tag{5}$$

$$|\psi_3\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|00\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|11\rangle, \tag{6}$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|10\rangle + |11\rangle\right]. \tag{7}$$

(a) Determinare la probabilità che un sistema preparato nello stato $|00\rangle$ venga rivelato in ciascuno dei quattro stati $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$, $|\psi_4\rangle$.

(b) Supporre che il sistema si trovi nello stato

$$|\phi\rangle = N\left[|\psi_1\rangle + 2i\sqrt{\frac{2}{3}}|\psi_2\rangle\right]. \tag{8}$$

Determinare la costante di normalizzazione N. Determinare inoltre la probabilità che un sistema preparato in questo stato venga rivelato nello stato $|00\rangle$.

(c) Supporre che su un sistema che si trova nello stato $|\phi\rangle$ Eq. (8) venga eseguita una prima misura che rivela che si trova nello stato $|\psi_2\rangle$. Qual è la probabilità di trovare questo risultato? Qual è probabilità che una successiva misura riveli il sistema nello stato $|00\rangle$?

(6) Nella situazione del problema (2), considerare un rivelatore R che restituisce il valore 1 se la molecola viene rivelata, e 0 se non viene rivelata. Considerare inoltre un rivelatore R' che restituisce il valore $+1$ se la molecola viene rivelata, e -1 se non viene rivelata.

(a) Scriverere la matrice dei tre operatori R_1, R_2 R_3 corrispondenti alle tre posizioni del rivelatore, nella base degli stati $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$.

(b) Determinare il valor medio dei risultati della misura dell'osservabile associata agli operatori R_i per il sistema del problema (1) che si trova nello stato $|\psi_A\rangle$ Eq. (1).

(c) Rispondere nuovamente alle due domande precedenti, ma nel caso del rivelatore R'.

(d) Determinare lo stato in cui si trova il sistema dopo la misura degli operatori R_i e R'_i a seconda dei risultati della misura, e in particolare discutere se siano diversi o meno a seconda di quale dei due rivelatori venga usato.

(7) Nella situazione delle domande (1-2), considerare l'operatore associato all'osservabile O_B, che prende il valore $+1$ quando il sistema viene rivelato nello stato $|\psi_B\rangle$ Eq. (2) e 0 quando il sistema non viene rivelato nello stato $|\psi_B\rangle$ (ossia se viene rivelato in qualunque stato ortogonale a $|\psi_B\rangle$).

(a) Scrivere la matrice dell'operatore associato a questa osservabile, nella base degli stati $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$

(b) Se un sistema è preparato nello stato $|\psi_A\rangle$ Eq. (1), quali sono i possibili valori di una misura dell'osservabile O, qual è la probabilità di trovare ciascuno di questi valori, e in che stato si trova il sistema dopo la misura in ciascun caso?

(c) Supporre che il sistema si trovi in uno stato qualunque $|\chi\rangle$ e che venga effettuata una misura dell'osservabile O_B. Determinare i due operatori Π_1 e Π_2 che agendo sullo stato $|\chi\rangle$ restituiscono (a meno della normalizzazione) lo stato in cui il sistema si trova dopo la misura, a seconda dei due risultati possibili della misura.

(8) Siano A e B operatori hermitiani e sia $C = A\,B$.

(a) Determinare l'operatore $C^\dagger$ in termini di A e B.

(b) Quale condizione devono soddisfare A e B affinché $C = C^\dagger$?

(c) Quale condizione devono soddisfare A e B affinché $C = -C^\dagger$?

(d) Dimostrare che C può sempre essere scritto come somma di un operatore hermitiano e di un operatore anti-hermitiano e scrivere l'espressione esplicita della parte hermitiana e della parte antihermitiana di C in termini di A e B.

(9) *[Esame Febbraio 2, a.a. 2023/24, domande 4,5,7].*
Considerare nuovamente il sistema del problema (4).

(a) Considerare l'operatore

$$A = i|10\rangle\langle 01|. \tag{9}$$

Scrivere la matrice dell'operatore A e del suo aggiunto $A^\dagger$ nella base dei due qubit, ossia nella base degli stati $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$. L'operatore A è hermitiano?

(b) Determinare i possibili risultati diversi da zero di una misura dell'operatore

$$B = A + A^\dagger. \tag{10}$$

Determinare inoltre la probabilità di ciascun risultato per un sistema che si trova nello stato $|\psi_0\rangle$ Eq. (3), e lo stato in cui si trova il sistema subito dopo la misura a seconda del suo risultato.

(c) Determinare per un sistema che si trova nello stato $|\psi_0\rangle$ Eq. (3) la probabilità che una misura dell' operatore B Eq. (10) dia come risultato 0, e lo stato in cui si trova il sistema subito dopo la misura in questo caso.

(10) Per un sistema di un qubit, considerare gli stati $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \pm |1\rangle\right)$.

(a) Determinare la matrice dell'operatore σ che agisce nel modo seguente sui due stati del qubit:

$$\begin{aligned}\sigma|0\rangle &= i|1\rangle \\ \sigma|1\rangle &= -i|0\rangle.\end{aligned} \tag{11}$$

Discutere se si tratti o meno di un operatore associato ad un'osservabile e in caso affermativo determinare i possibili risultati della misura di questo operatore.

(b) Scrivere in notazione ket-bra l'operatore lineare $\mathcal{H}$ che agendo sullo stato $|0\rangle$ lo trasforma nello stato $|+\rangle$ e agendo sullo stato $|1\rangle$ lo trasforma nello stato $|-\rangle$ (operatore di Hadamard).

(c) Scrivere la matrice dell'operatore di Hadamard nella base degli stati $|i\rangle$ e discutere se sia hermitiano o unitario.

(d) Determinare la matrice che fa passare dalla base degli stati $|i\rangle$ alla base degli stati $|\pm\rangle$.

(11) Per ciascuno dei seguenti operatori, si determini se siano o meno unitari e/o hermitiani:

(a) l'operatore O_B del problema (7);

(b) l'operatore $\mathcal{H}$ del problema (10), punto (b);

(c) gli operatori Π_1 e Π_2 determinati al punto (c) del problema (7).

(12) Per uno stato di due qubit $|ij\rangle$, con i, $j = 0, 1$ si determinino le matrici dei seguenti operatori, e si discuta se siano unitari e/o hermitiani:

(a) l'operatore che scambia i due qubit (SWAP);

(b) l'operatore che se il primo qubit vale 0 lascia il secondo qubit invariato, e se il primo qubit vale 1 trasforma il valore del secondo qubit in 0 se esso vale 1 e viceversa (CNOT).

(13) Considerare gli operatori R_i e R'_i del problema (6).

(a) Determinare se siano compatibili o meno.

(b) Determinare se alcuni di essi formino un insieme completo di operatori.

(14) *[Esame Febbraio 2, a.a. 2019/20, domande 4,8].*
Nella situazione del problema (5), considerare l'osservabile O_1, che prende il valore $+1$ quando il sistema viene rivelato nello stato $|\psi_1\rangle$ Eq. (4) e 0 quando il sistema viene rivelato in qualunque stato ortogonale a $|\psi_1\rangle$, e l'osservabile O_2, che prende il valore $+1$ quando il sistema viene rivelato nello stato $|\psi_2\rangle$ Eq. (5) e 0 quando il sistema viene rivelato in qualunque stato ortogonale a $|\psi_2\rangle$. Le osservabili O_1 e O_2 sono compatibili?

(15) Considerare l'osservabile associata all'operatore σ Eq. (11) e l'osservabile σ' associata all osservabile che prende i valori ± 1 rispettivamente quando il sistema viene rivelato nei due possibili stati del qubit.

(a) Determinare la relazione di indeterminazione per questa coppia di operatori.

(b) Verificare che la relazione di indeterminazione è soddisfatta sugli autostati di σ e spiegare il risultato.

(c) Determinare il o gli stati di minima indeterminazione, ossia gli stati per i quali la relazione di indeterminazione vale con l'uguaglianza. Determinare quindi l'indeterminazione di σ e σ' in questi stati.

(16) *[Esame Febbraio 2, a.a. 2023/24, domanda 8].*
Nella situazione dei problemi (4) e (9), determinare se l'operatore

$$C = |10\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| \tag{12}$$

sia compatibile con l'operatore B Eq. (10), e determinare il minimo valore del prodotto delle indeterminazioni degli operatori B e C in uno stato generico.

(17) *[Esame Febbraio 2, a.a. 2017/18, domande 1-5].*
Si consideri un sistema di un qubit i cui due stati $|0\rangle$, $|1\rangle$ sono autostati di un'osservabile O che soddisfano le equazioni agli autovalori

$$O|0\rangle = |0\rangle; \qquad O|1\rangle = -|1\rangle. \tag{13}$$

(a) Il sistema viene preparato in un certo stato $|\psi\rangle$, oppure in un altro stato $|\phi\rangle$, e quindi viene effettuata una misura di O. L'operazione (preparazione seguita da misura) è ripetuta più volte. Quando il sistema viene preparato in $|\psi\rangle$ la misura dà sempre come risultato -1, mentre quando il sistema viene preparato in $|\phi\rangle$ la misura dà $+1$ in $\frac{1}{3}$ dei casi, e -1 in $\frac{2}{3}$ dei casi. Scrivere la più generale forma dei vettori di stato $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ nella base computazionale (base degli autostati di O).

(b) Da quanti parametri dipende ciascuno dei vettori di stato della domanda precedente, quali e quanti di questi parametri sono inosservabili, e quali invece corrispondono a proprietà misurabili del sistema?

(c) Qual è la probabilità che un sistema preparato nello stato $|\phi\rangle$ venga rivelato nello stato $|\psi\rangle$? Il risultato è univocamente determinato, o dipende da qualcuno dei parametri da cui dipendono $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$?

(d) Si cosideri un'osservabile P, avente spettro non degenere e tale che lo stato $|\phi\rangle$ della domanda (a) sia autostato di P. Le osservabili O e P sono compatibili? La risposta dipende dal fatto che lo spettro di P sia degenere o meno?

(e) Determinare il valor medio e l'indeterminazione dei risultati delle misure di O in ciascuno dei due stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$.

(18) *[Esame Febbraio 2, a.a. 2021/22, domande 1-5,7-8].*
Considerare un sistema quantistico che può trovarsi in tre stati esaustivi ed esclusivi, indicati come $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$.

(a) Determinare il più generale vettore di stato $|\psi\rangle$ per questo sistema, specificando da quanti parametri dipende nel caso più generale e quali e quanti di questi parametri sono osservabili.

(b) Vi sono tante copie del sistema del punto precedente, tutte preparate nello stesso stato $|\psi_0\rangle$. Su ciascuna di esse viene effettuata una misura che rivela solo se il sistema si trovi o meno nello stato $|3\rangle$, senza fornire alcuna ulteriore informazione. Il sistema viene rivelato nello stato $|3\rangle$ nella metà dei casi. Determinare la più generale forma del vettore di stato $|\psi_0\rangle$, specificando quanti dei parametri da cui dipende $|\psi\rangle$ del punto (1) sono stati fissati in questo particolare caso.

(c) Sul sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle$ determinato al punto (a) viene effettuata la misura descritta al punto (b). Determinare gli stati $|\psi_1\rangle$ oppure $|\psi_2\rangle$, correttamente normalizzati, in cui si trova il sistema dopo la misura, a seconda dei due risultati possibili di questa misura.

(d) Su un sistema che si trova nello stato $|\psi_0\rangle$ determinato al punto (b) viene effettuata una misura dell'operatore

$$O_1 = \mu_1|1\rangle\langle 1| + \mu_2|2\rangle\langle 2| + \mu_3|3\rangle\langle 3|, \tag{14}$$

con $\mu_1 = +1$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = -1$. Quali sono i possibili risultati di questa misura e quali sono le relative probabilità?

(e) Rispondere nuovamente alla domanda (d), se la misura della domanda (d) viene effettuata dopo quella discussa al punto (b), cioè su un sistema che si trova in uno dei due stati $|\psi_1\rangle$ o $|\psi_2\rangle$.

(f) Dato un operatore della forma

$$O_x = \lambda_1|1\rangle\langle 1| + \lambda_2|2\rangle\langle 2| + \lambda_3|3\rangle\langle 3| \tag{15}$$

determinare λ_1, λ_2, λ_3 in modo che soddisfino simultaneamente le seguenti condizioni: $O_x = O_x^\dagger$, $\mathrm{Tr}\, O_x = 0$, $\lambda_1 = +1$, e che la misura di questo operatore corrisponda alla misura del punto (b).

(g) Considerare l'operatore

$$O_y = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \tag{16}$$

Determinare se questo operatore sia compatibile con O_x, o, più in generale, con qualunque operatore associato all'osservabile corrispondente alla misura del punto (b).

(19) Da quanti parametri dipende la matrice densità per un sistema che si trova in uno stato puro, e da quanti se si trova in uno stato misto

(a) per un sistema di un qubit

(b) per un sistema di due qubit.

(20) Nella situazione della domanda (1) le fenditure sono entrambe aperte ed equipaggiate con un rivelatore. Tuttavia non è possibile mettere in coincidenza il rivelatore con il passaggio delle molecole, e quindi non si sa da quale fenditura sia passata ciascuna molecola; si solo che le molecole hanno il 50% di probabilitá di passare da ciascuna fenditura.

(a) Determinare la matrice densità per il sistema dato.

(b) Determinare la probabilità che la molecola venga rivelata in ciascuna delle quattro cellette, e discutere se sia la stessa del caso in cui le fenditure sono aperte ma non equipaggiate con un rivelatore.
Come si calcola la probabilità dei risultati di una misura in uno stato misto?

(c) Viene ora attivato il rivelatore R_2 del problema (6), e vengono scartate tutte le molecole per cui la lettura del rivelatore fornisce il risultato 0. Determinare la matrice densità ρ_2 per l'insieme statistico (*ensemble*) di molecole restanti.

(d) La matrice densità ρ_2 tovata al punto precedente è unica? Se non lo è, dare un esempio di una diversa sovrapposizione di stati (diversi stati e diverse probabilità) che corrisponde alla stessa matrice densità.

(e) Dato un insieme di oggetti descritto dalla matrice densità ρ_2 trovata al punto (c), qual è il valor medio della misura delle osservabili che nel sottospazio associato alla misura di 1 rispetto a R_2 prendono la forma delle matrici di Pauli?

(f) Se invece che le osservabili date dalle matrici di Pauli si misurano l'osservabile associata all'operatore O_B della domanda (7) e qualla associata al rivelatore R_1 è possibile determinare se la matrice ρ_2 corrisponde a uno stato puro o a uno stato misto? È possibile determinarla completamente?

(21) *[Esame Febbraio 2, a.a. 2019/20, domande 6-7].*
Considerare il sistema dei problemi (5) e (14).

(a) Scrivere il più generale vettore di stato per il sistema dato. Da quanti parametri dipende questo generico vettore di stato? Quali e quanti di questi parametri sono inosservabili?

(b) Se gli stati del sistema autovalori degeneri rispetto alla misura dell'osservabile O_1 non sono distinguibili attraverso nessuna possibile misura, da quanti parametri dipende lo stato del sistema?

(c) Da quanti parametri dipende la matrice densità per il sistema dato, sia per uno stato puro che per uno stato misto?

(22) Dimostrare che data una funzione $f(x)$ tale per cui, nei punti $x = x_i$, $f(x_i) = 0$ e $f'(x_i) \neq 0$, allora

$$\delta\left[f(x)\right] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x)|_{x=x_i}}. \tag{17}$$

Utilizzare il risultato per calcolare i seguenti integrali

(a)

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y^2 - x) f(y) dy. \tag{18}$$

(b)

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y^2 - x^2) f(y) dy. \tag{19}$$

(23) Calcolare i seguenti commutatori (si intende che x e p indicano sempre i corrispondenti operatori)

(a) $[x, p^n]$;

(b) $[x^n, p]$;

(c) $[x^2, p^2]$;

(d) $[p, \exp(\lambda x)]$.

(e) $[x, \exp(\lambda p)]$.

(24) Si consideri un sistema invariante per dilatazioni, $q \to q' = \lambda q$:

(a) Determinare, mediante il teorema di Noether, la quantità classicamente conservata (detta viriale).

(b) Determinare l'operatore quantistico che si ottiene prendendo il viriale classico, e sostituendo q e p con gli operatori quantistici corrispondenti. Discutere se l'operatore che si ottiene sia o meno hermitiano.

(c) Determinare come si trasforma sotto dilatazioni un autostato della posizione e determinare la condizione di normalizzazione degli operatori trasformati.

(d) Determinare l'operatore hermitiano che genera le dilatazioni sugli stati quantistici $|q\rangle$, e discutere la sua relazione con la quantità classica ottenuta al punto (b).

(25) Definire l'operatore $\mathcal{P}$ (operatore parità) i cui elementi di matrice soddisfano

$$\langle x|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-x), \tag{20}$$

dove $|\psi\rangle$ è uno stato qualunque e $|x\rangle$ sono autofunzioni della posizione.

(a) Determinare le autofunzioni e gli autovalori di P.

(b) Determinare gli elementi di matrice del commutatore $[\mathcal{P}, T]$, dove T è l'operatore traslazione, fra autostati della posizione, ed in particolare discutere se esso si annulli o meno.

(c) Determinare l'effetto di una trasformazione di parità sull'operatore posizione, ossia determinare $\mathcal{P}^{-1}\hat{x}\mathcal{P}$.

(d) Determinare l'effetto di una trasformazione di parità sull'operatore traslazione, ossia determinare $\mathcal{P}^{-1}T\mathcal{P}$.

(e) Determinare gli elementi di matrice $\langle x|\mathcal{P}^{-1}\hat{p}\mathcal{P}|\psi\rangle$, dove $|x\rangle$ è un autostato della posizione, $\hat{p}$ è l'operatore impulso, e $|\psi\rangle$ è uno stato generico

(26) *[Esame Luglio, a.a. 2013/14, domande 1-2].*
Un sistema unidimensionale viene preparato in certo stato $|\psi\rangle$, oppure in un altro stato $|\phi\rangle$.

(a) Sul sistema viene eseguita una misura di impulso. Quando il sistema viene preparato in $|\phi\rangle$, la misura dà sempre come risultato $\hbar k_1$. Invece quando il sistema viene preparato in $|\psi\rangle$ la la misura dà come risultato $\hbar k_2$ in $\frac{1}{3}$ dei casi, e $-\hbar k_2$ in $\frac{2}{3}$ dei casi. Scrivere la più generale forma delle funzioni d'onda $\phi(x) = \langle x|\phi\rangle$ e $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$. Da quanti parametri dipende ciascuna di queste funzioni d'onda e quali e quanti di questi parametri sono convenzionali, e quali invece corrispondono a proprietà misurabili del sistema?

(b) Determinare valor medio ed indeterminazione di posizione ed impulso per un sistema che si trova nello stato $|\phi\rangle$, e valor medio ed indeterminazione dell'impulso per un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle$.

(c) Determinare valor medio ed indeterminazione della posizione per un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle$ (supponendo che $k_2 \neq 0$).