PROBLEMI DI FISICA QUANTISTICA

SECONDA PARTE
anno accademico 2026-2027

(1) Per un sistema meccanico d-dimensionale determinare:

   (a) gli elementi di matrice dell'operatore posizione $\vec{x}$ e dell'operatore impulso $\vec{p}$ tra autostati dell'impulso $|\vec{p}\rangle$;
   qual è l'operatore che genera la trasformazione $k_i \to k_i + \delta$, dove k_i è l'i-esima componente dell'impulso?

   (b) le autofunzioni dell'operatore posizione nella base degli autostati dell'impulso $\langle\vec{k}|\vec{x}\rangle$;
   le condizioni di autostato rispetto alle diverse componenti dell'impulso sono indipendenti?

   (c) la relazione tra le espressioni di un vettore di stato generico $|\psi\rangle$ nella base degli autostati della posizione e nella base degli autostati dell'impulso.
   idem: il cambio di base tra autofunzioni della posizione e dell'impulso lungo ciascuna dimensione dipende dalle altre dimensioni?

(2) In uno spazio d-dimensionale:

   (a) determinare il generatore della trasformazione $\vec{k} \to \vec{k} + \hat{n}$, dove $\vec{k}$ è un vettore impulso, e $\hat{n}$ è un qualunque versore (vettore di norma uno), ed esprimere il risultato in termini dell'operatore posizione d-dimensionale $\hat{\vec{x}}$ nello spazio degli impulsi;
   Che differenza c'è fra questo caso e quello della domanda precedente?

   (b) scrivere l'operatore che realizza la trasformazione finita discussa al punto precedente, prima in termini del generatore, e poi esplicitamente nella base degli autostati dell'impulso.
   Che relazione c'è tra trasformazione finita ed infinitesima?

(3) *[Esame aprile, a.a. 2024–2025, domande 1-4,7]*
Considerare un sistema formato da due particelle di uguale massa m in tre dimensioni aventi dinamica descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2), \tag{1}$$

dove $\vec{x}_n$, $\vec{p}_n$, $n = 1, 2$ sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso per le due particelle e il potenziale $V(\vec{x}_n)$ ha la forma

$$V(x_1^{(i)} - x_2^{(i)}) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_1^{(i)} - x_2^{(i)}| \le L \\ \infty \text{ se } |x_1^{(i)} - x_2^{(i)}| > L \end{cases}, \tag{2}$$

dove $x_1^{(i)} - x_2^{(i)}$ è la i-esima componente dell'operatore $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ e L è una costante reale positiva.

   (a) Separare la hamiltoniana nella somma di una hamiltoniana baricentrale ed una hamiltoniana relativa.
   Che forma hanno le coordinate baricentrali e relative?

   (b) Determinare lo spettro di energia della hamiltoniana, e inoltre la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato della hamiltoniana relativa.
   Quali sono gli spettri della hamiltoniana baricentrale e relativa?

   (c) Scrivere le autofunzioni $|n_1 n_2 n_3\rangle$ della hamiltoniana relativa nella base delle coordinate.
   Che forma hanno le autofunzioni per un problema separabile?

(d) Sul sistema dato viene effettuata una misura dell'operatore

$$O = |111\rangle\langle 112| + |112\rangle\langle 111|, \tag{3}$$

dove $|n_1 n_2 n_3\rangle$ sono autofunzioni della hamiltoniana relativa. Determinare tutti i possibili risultati della misura e lo stato in cui si trova il sistema dopo la misura.
A che matrice corrisponde l'operatore dato?

(e) Determinare la probabilità dei possibili risultati della misura trovati nella domanda precedente, nell'ipotesi che prima della misura il sistema si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|111\rangle + |112\rangle + |121\rangle\right). \tag{4}$$

Quali sono gli stati associati ai risultati della misura?

(f) Supporre ora che sul sistema dato venga effettuata una misura dell'operatore

$$O' = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|, \tag{5}$$

dove si intende che l'operatore O' su uno stato $|n_1 n_2 n_3\rangle$ agisce come l'identità rispetto a n_1 ed n_2. Determinare i possibili risultati della misura di questo operatore, e la matrice densità relativa allo stato in cui il sistema si trova dopo la misura.
Qual è l'effetto di una misura (proiezione).

(g) Determinare la probabilità dei risultati della misura al punto precedente, supponendo che prima della misura il sistema si trovi nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (4).
Come agisce un proiettore su uno stato?

(4) *[Esame Gennaio II, a.a. 2016–2017, domande 1-3]*
Considerare un sistema formato da n particelle di uguale massa m ed una particella di massa M, in una dimensione spaziale, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p_0^2}{2M} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^2}{2m} + V(x_i, x_0)\right), \tag{6}$$

dove x_i, p_i, x_0, p_0 sono gli operatori posizione e impulso rispettivamente per le n particelle di massa m e per la particella di massa M, ed il potenziale $V(x_i, x_0)$ ha la forma

$$V(x_i, x_0) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_i - x_0| \le L \\ V_0 \text{ se } |x_i - x_0| > L \end{cases}, \tag{7}$$

dove $V_0 \to \infty$ e L è una costante reale e positiva.

(a) Separare la hamiltoniana H_0 nella somma di $n+1$ hamiltoniane commutanti, considerando $\frac{m}{M}$ trascurabile ($\frac{m}{M} \ll 1$).
Qual è l'espressione delle coordinate baricentrali e relative?

(b) Determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato per la hamiltoniana data.
Qual è lo spettro baricentrale, e quale lo spettro delle hamiltoniane relative?

(c) Scrivere (senza risolverle) le equazioni del moto alla Heisenberg per il sistema separato secondo la prima domanda.
Come si scrive un potenziale tipo buca usando la funzione a gradino di Heaviside?

(5) *[Esame Febbraio, a.a. 2010–2011, domande 1-4,7]*
Considerare un sistema di due particelle cariche tridimensionali che interagiscono tra di loro con un potenziale armonico e soggette ad un campo elettrico costante $\vec{E}$. La dinamica del sistema è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 + e_1\vec{E}\cdot\vec{x}_1 + e_2\vec{E}\cdot\vec{x}_2, \tag{8}$$

dove $\vec{p}_i$ ed $\vec{x}_i$ sono rispettivamente gli operatori impulso e posizione per le due particelle, $\vec{E}$ è il vettore campo elettrico, costante a componenti reali, e m ed e_i sono rispettivamente la massa (uguale) e la carica (in generale diversa) delle particelle.

(a) Attraverso un opportuno cambio di variabili, separare il moto del baricentro dal moto relativo.
Qual è la forma delle coordinate baricentrali e relativa?

(b) Determinare la dipendenza temporale degli operatori posizione ed impulso del baricentro in rappresentazione di Heisenberg.
Che forma ha la hamiltoniana baricentrale?

(c) Scrivere le equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg per gli operatori posizione ed impulso relativi.
Che forma ha la hamiltoniana relativa?

(d) Determinare lo spettro dell'hamiltoniana relativa in assenza di campo elettrico.
Di che hamiltoniana si tratta?

(e) In presenza di campo elettrico e nel caso generale $e_1 \neq e_2$, determinare lo spettro dell'hamiltoniana relativa attraverso un'opportuna trasformazione di coordinate.
Da che coordinata dipende l'accoppiamento col campo elettrico?

(6) Considerare un sistema di due particelle di uguale massa m in una dimensione la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{4}m\omega^2\left(5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2\right), \tag{9}$$

dove x_1 e x_2 sono le coordinate delle due particelle.

(a) Determinare un cambiamento lineare di coordinate che permette di separare il problema;
Che condizioni deve soddisfare il cambiamento di coordinate?

(b) Usando il risultato della domanda precedente, determinare lo spettro di energia e la sua degenerazione.
Che forma ha la hamiltoniana nelle nuove coordinate??

(7) Considerare un sistema di tre particelle di ugual massa m su un segmento di lunghezza L, ciascuna delle quali interagisce con i primi vicini, e con le due particelle più esterne che interagiscono con un estremo fisso, tutte attraverso un potenziale armonico con costante elastica k. Il potenziale per il sistema è dunque dato da

$$V(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2}k^2\left(y_1^2 + (y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 + y_3^2\right), \tag{10}$$

dove $y_i = x_i - x_i^{(0)}$ sono gli spostamenti delle tre particelle dalla posizione di equilibrio $x_i^{(0)} = i\frac{L}{4}$.

(a) Disaccoppiare la Hamiltoniana mediante un'opportuno cambio di coordinate.
Che condizioni deve soddisfare il cambio di coordinate?

(b) Determinare lo spettro della hamiltoniana e discutere la sua degenerazione.
Che relazione c'è fra gli autovalori di energia e la hamiltoniana scritta nella forma Eq. (10)?

(8) *[Esame Giugno, a.a. 2022–2023, domande 1-5,8]*
Si consideri una sistema di tre particelle in una dimensione aventi la stessa massa m, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_3^2 + \lambda x_2, \tag{11}$$

dove x_i e p_i sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso delle tre particelle, e ω e λ sono costanti reali positive.

(a) Nel caso $\lambda = 0$, determinare lo spettro della hamiltoniana, la sua degenerazione, e la funzione d'onda di stato fondamentale.
Di che hamiltoniana si tratta? Come è fatto lo spettro di una hamiltoniana separabile? Come è definita la degenerazione? Come è fatta la funzione d'onda di una hamiltoniana separabile?

(b) Scrivere le equazioni di Heisenberg per gli operatori x_i e p_i nel caso generale in cui $\lambda \neq 0$ e risolverle nel caso $\lambda = 0$.
Che equazioni sono?

(c) Determinare lo spettro, la degenerazione e la funzione d'onda di stato fondamentale della hamiltoniana H_0 nel caso $\lambda \neq 0$.
Si riece a riscrivere la hamiltonana in termini di una hamiltoniana nota?

(d) Determinare i valori medi degli operatori x_i e p_i in qualunque autostato della hamiltoniana.
Qual è la trasformazione che lega le due hamiltoniane?

(e) Determinare l'operatore $\mathcal{O}_\lambda$ tale che $\mathcal{O}_\lambda|0_0\rangle = |0_\lambda\rangle$, dove $|0_0\rangle$ e $|0_\lambda\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale della hamiltoniana quando $\lambda = 0$ e quando $\lambda \neq 0$.
Qual è l'operatore che realizza la trasformazione che lega le due hamiltoniane?

(9) *[Esame Gennaio, a.a. 2024–2025, domande 1,7,8]*
Considerare un sistema di tre particelle in una dimensione la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \hbar\omega\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + a_3^\dagger a_3\right) + i\hbar\lambda\left(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1\right), \tag{12}$$

dove gli operatori $a_i^\dagger$, a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}; \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = [a_i, a_j] = 0, \tag{13}$$

a_i, $a_i^\dagger$ sono operatori che agiscono sullo spazio degli stati fisici della i-esima particella, e ω e λ sono costanti reali non negative.

(a) Nel caso $\lambda = 0$ determinare lo spettro della hamiltoniana data e la sua degenerazione.
Di cha hamiltoniana si tratta?

(b) Dimostrare qual è la condizione sulla matrice U tale per cui gli operatori $b_i = U_{ij}a_j$ soddisfano le stesse relazioni di commutazione degli operatori a_i, ossia tale che $[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}$.
Quanto vale il commutatore di una combinazione lineare di operatori?

(c) Sfruttando il risultato della domanda precedente, determinare, nel caso $\lambda \neq 0$, la trasformazione che separa la hamiltoniana nella somma di tre hamiltoniane unidimensionali commutanti e determinarne lo spettro.
Come si scrive la hamiltoniana data considerando gli a_i come vettori?

(10) (a) Per un sistema *bidimensionale*, determinare l'operatore (hermitiano) impulso radiale, e determinare l'operatore energia cinetica esplicitamente in coordinate polari (r, θ),

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{14}$$

(b) Dimostrare che in d dimensioni

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\dagger = -\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{d-1}{r}\right) \tag{15}$$

attraverso il calcolo dell'elemento di matrice $\langle\psi|\tilde{p}_r|\phi\rangle$ nella rappresentazione delle coordinate, dove $\tilde{p}_r = -i\hbar\frac{\partial}{\partial r}$.

(c) Separare l'operatore cinetico in d dimensioni in parte radiale e parte angolare, sfruttando l'espresione del laplaciano in d dimensioni

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{L^2}{r^2}, \tag{16}$$

dove L^2 è un operatore che agisce solo sulle variabili angolari.

(11) Considerare una trasformazione generale di coordinate in d dimensioni $\vec{x} \to \vec{\xi}$, con $\xi_i = \xi_i(x_j)$.

(a) Determinare l'espressione della delta di Dirac d dimensionale $\delta^{(d)}(\vec{\xi} - \vec{\alpha})$, dove $\vec{\alpha}$ è un vettore (costante) d-dimensionale in termini della delta di Dirac $\delta^{(d)}(\vec{x})$, definita come

$$\delta^{(d)}(\vec{x}) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_n), \tag{17}$$

dove $x_1, \dots, x_d$ sono le d componenti del vettore $\vec{x}$.

(b) Considerare ora il caso della trasformazione fra coordinate cartesiane e coordinate ipersferiche, definite come

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi_1 \\ r\sin\phi_1\cos\phi_2 \\ \dots \\ r\sin\phi_1\sin\phi_2\dots\sin\phi_{d-1} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Esprimere la delta di Dirac d-dimensionale $\delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta(x^1 - x_0^1)\delta(x^2 - x_0^2)\dots\delta(x^d - x_0^d)$ in termini del prodotto di una delta radiale e di $d-1$ delta angolari.

(c) Fornire l'espressione esplicita della delta di Dirac in coordinate sferiche per $d = 3$, e considerare in particolare il caso in cui il punto $\vec{x}_0$ è l'origine.

(12) Considerare un operatore $\vec{v}$ che soddisfa le relazioni

$$[L_i, v_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}v_k\,. \tag{19}$$

(a) Dimostrare con il calcolo esplicito utilizzando la relazione di commutazione che l'operatore

$$v_i' = e^{-i\phi L_x/\hbar} v_i e^{i\phi L_x/\hbar} \tag{20}$$

è l'operatore v_i ruotato di un angolo ϕ attorno all'asse x.

(b) Dimostrare che

$$e^{i\pi L_x/\hbar}|l, m\rangle = |l, -m\rangle. \tag{21}$$

(c) Mostrare che l'operatore $e^{i\pi\frac{L_x}{2\hbar}}e^{-i\pi\frac{L_y}{\hbar}}e^{-i\pi\frac{L_x}{2\hbar}}$ può essere scritto come l'operatore di rotazione attorno all'asse z di un angolo ϕ. Determinare ϕ.

(13) Considerare gli autostati del momento angolare $|lm\rangle$.

(a) Calcolare il valor medio in un autostato generico degli operatori L_x, L_y, L_x^2 ed L_y^2.

(b) Definire le matrici $(2l+1)\times(2l+1)$

$$\bar{L}^i_{mm'} \equiv \langle lm|L^i|lm'\rangle \tag{22}$$

e calcolare la traccia del prodotto di due di queste matrici, $\mathrm{Tr}(\bar{L}^i\bar{L}^j)$, con $i \neq j$.

(14) Determinare la dipendenza dal tempo del valor medio delle tre componenti del momento angolare $\langle L^i\rangle$ in uno stato qualunque per un sistema avente hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}). \tag{23}$$

(15) Determinare ad ogni tempo t il valor medio del vettore posizione $\langle\vec{x}\rangle$ e del vettore impulso $\langle\vec{p}\rangle$ per un sistema che al tempo zero ha

$$\langle\vec{x}\rangle = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \langle\vec{p}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ p_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

e la cui dinamica è descritta dalla Hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \vec{B}\cdot\vec{L}, \tag{25}$$

dove $\vec{B}$ è il vettore costante

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

(16) *[Esame luglio, a.a. 2024–2025, domande 1-3,7,9,11]*
Considerare una particella la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = \mu\vec{L}^2, \tag{27}$$

dove $\vec{L} = \vec{x}\times\vec{p}$ sono operatori di momento angolare e μ è una costante reale positiva.

(a) Determinare lo spettro di autovalori dell'hamiltoniana e la sua degenerazione.

(b) Determinare la funzione d'onda di stato fondamentale nella base delle coordinate.

(c) Sul sistema viene effettuata una misura di momento angolare che lo rivela nello stato con $\ell = 1$ e $m = -1$. Immediatamente dopo viene effettuata una misura dell'operatore

$$L_w = i\left(|1-1\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 1-1|\right) \tag{28}$$

dove $|\ell m\rangle$ sono autostati di H_0. Determinare i possibili risultati di questa misura, le loro probabilità, e lo stato in cui si trova il sistema dopo la misura.

(d) Supporre ora che la hamiltoniana sia data da

$$H = H_0 + \vec{B}\cdot\vec{L}, \tag{29}$$

dove $\vec{B}$ è un vettore a componenti reali diretto lungo l'asse z. Sul sistema al tempo $t = 0$ viene eseguita una misura dell'operatore L_w che lo rivela nello stato avente autovalore massimo. Determinare la probabilità che al tempo t una successiva misura dell'operatore L_w riveli il sistema nello stesso stato.

(e) Calcolare l'indeterminazione di L_x e L_y in un autostato $|\ell m\rangle$ di L^2 e L_z.

(f) Usare il risultato della risposta precedente per determinare quale degli stat $|\ell m\rangle$ sia di minima indeterminazione per la coppia di operatori L_x e L_y, ossia sia tale che il prodotto delle indeterminazioni $\Delta L_x \Delta L_y$ sia diverso da zero e prenda il minimo valore compatibile con il principio di indeterminazione.

(g) Dimostrare che gli stati trovati al punto precedente soddisfano le due condizioni (disuguaglianza di Schwarts e anticommutazione) per il la relazione di indeterminazione vale con l'uguaglianza.

(17) Considerare uno stato $|0\rangle$ avente funzione d'onda

$$\langle \vec{x}|0\rangle = \psi_0(\vec{x}) = f(r), \tag{30}$$

con $r = |\vec{x}|$, ed i tre stati $|i\rangle$ aventi funzione d'onda

$$\langle \vec{x}|i\rangle = \psi_i(\vec{x}) = x^i \psi_0(\vec{x}). \tag{31}$$

(a) Dimostrare che $\psi_0(\vec{x})$ è un autostato di tutte le componenti L^i del momento angolare e dunque anche di L^2 e determinare l'autovalore corrispondente.

(b) Dimostrare che $\psi_i(\vec{x})$ è un autostato di L_i e determinare l'autovalore corrispondente.

(c) Calcolare il commutatore $[L_i, [L_i, x^j]]$ ed utilizzare il risultato per dimostrare che $\psi_i(\vec{x})$ sono tutti autostati di L^2 e determinare l'autovalore corrispondente.

(18) Considerare lo spazio degli stati fisici avente per vettori di base i tre stati $|i\rangle$ Eq. (31).

(a) Determinare le matrici che rappresentano gli operatori di momento angolare L^i in questo spazio, ossia

$$L^i_{jk} = \langle j|L^i|k\rangle. \tag{32}$$

(b) Diagonalizzare l'operatore $L_z \equiv L^3$ in questo spazio e determinare la matrice di passaggio fra la base degli stati Eq. (31) e la base in cui L_z è diagonale.

(c) Determinare gli elementi di matrice di tutt'e tre gli operatori L^i nella base in cui L_z è diagonale *senza* usare la matrice di cambiamento di base determinata al punto precedente, ma sfruttando le relazioni di commutazione fra ghli operatori L^i.

(d) Determinare in questa base gli autostati dell'operatore $\vec{n} \cdot \vec{L}$, dove $\vec{n}$ è un asse qualunque, in termini degli angoli θ, ϕ che determinano la direzione di $\vec{n}$.

(19) Considerare un sistema di spin $\frac{1}{2}$.

(a) Determinare la matrice dell'operatore spin lungo una direzione $\vec{n}$ qualunque nella base degli autostati di s_z, , in termini degli angoli θ, ϕ che determinano la direzione di $\vec{n}$.

(b) Determinare la matrice dell'operatore di rotazione finita di un angolo θ intorno all'asse $\vec{n}$ nella stessa base, ossia

$$R^{\vec{n}}_{\theta} = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\theta \vec{n} \cdot \vec{s}\right] \tag{33}$$

(c) Determinare nella stessa base l'operatore di proiezione dello spin lungo $\vec{n}$.

(d) Determinare, sempre nella stessa base, gli autostati dello spin lungo $\vec{n}$.

(e) Supporre che sia stata eseguita una misura di spin lungo l'asse $\vec{n}$ che ha dato come risultato $s_{\vec{n}} = +\frac{1}{2}$. Determinare le probabiltà che una misura di spin lungo l'asse z immediatamente successiva dia come risultato $\pm\frac{1}{2}$.

(f) Definire la quantitá $\vec{v}$ le cui componenti sono date da

$$v^i \equiv \langle\psi|s^i|\psi\rangle, \tag{34}$$

dove $|\psi\rangle$ è uno stato qualunque di spin $\frac{1}{2}$, e s^i sono gli operatori di spin. Eseguire una rotazione di angolo θ attorno all'asse $\vec{n}$ dello stato $|\psi\rangle$:

$$|\psi'\rangle = R^\theta_{\vec{n}}|\psi\rangle. \tag{35}$$

Determinare come si trasforma $\vec{v}$, ossia definito

$$v'_i = \langle\psi'|s^i|\psi'\rangle, \tag{36}$$

determinare la matrice M_{ij} tale che

$$v'_i = M_{ij}v_j. \tag{37}$$

(20) Considerare un sistema di spin $\frac{1}{2}$ (ossia un qubit), soggetto alla hamiltoniana

$$H = B\hat{s}_z. \tag{38}$$

Al tempo $t = 0$ viene eseguita una misura di spin lungo l'asse x.

(a) Determinare lo stato del sistema ad ogni tempo t, espresso nella base degli autostati di $\hat{s}_z$.

(b) Determinare il valor medio dello spin $\vec{s}(t) = \langle\hat{\vec{s}}\rangle$ ad ogni tempo t. Confrontare il risultato con quello del punto precedente e con il risultato del problema 15.

(c) Determinare la matrice $M_{ij}(t)$ tale che

$$s^i(t) = M_{ij}(t)s^j(0) \tag{39}$$

che lega $\vec{s}(t)$ al valore iniziale $\vec{s}(0)$.

(21) Determinare i coefficienti di Clebsch-Gordan per la composizione di uno spin $\frac{1}{2}$ ed uno spin $\frac{3}{2}$.

(22) *[Esame Gennaio, a.a. 2024–2025, domande 2,3,10,11]*
Considerare nuovamente il sistema del problema (9), ma con $\lambda = 0$, e supponendo che le tre particelle abbiano spin $\frac{1}{2}$. La hamiltoniana totale è

$$H = \hbar\omega\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + a_3^\dagger a_3\right) + \frac{\mu}{\hbar}\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2. \tag{40}$$

(a) Determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana.

(b) Considerare ora la hamiltoniana

$$H' = H + \frac{B}{\hbar}\vec{s}\cdot\vec{L}, \tag{41}$$

dove $\vec{s}$ è lo spin totale delle prime due particelle, $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ con $x_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a_i + a_i^\dagger\right)$ e $p_i = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(a_i - a_i^\dagger\right)$, e B è una costante reale positiva. Determinare lo spettro della hamiltoniana H'.

(c) Determinare lo spettro della hamiltoniana H'' data da

$$H'' = H + \hbar\lambda\left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1\right) + \frac{\kappa}{\hbar}|\vec{L}|^2 \tag{42}$$

con $\vec{L}$ come nella domanda precedente, ma ora nel caso in cui $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$.

(23) *[Esame aprile, a.a. 2022–2022, domande 5,7]*
Considerare un sistema formato da due particelle di uguale massa m e spin $\frac{1}{2}$ in tre dimensioni confinate all'interno di un parallelepipedo, ossia aventi dinamica descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + V(\vec{x}_1) + V(\vec{x}_2) + \frac{\lambda}{\hbar^2}\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \tag{43}$$

dove $\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$ $\vec{s}_i$ e sono rispettivamente gli operatori posizione, impulso e spin per le due particelle e il potenziale $V(\vec{x}_i)$ ha la forma

$$V(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_i^{(j)}| \leq a_j \\ V_0 \text{ se } |x_i^{(j)}| > a_j \end{cases}, \tag{44}$$

dove $V_0 \to \infty$, $x_i^{(j)}$ è la j-esima componente dell'operatore posizione per la i-esima particella e a_i sono costanti reali positive.

(a) Determinare lo spettro della hamiltoniana H.

(b) Determinare la degenerazione dello stato fondamentale e dei primi due stati eccitati nel caso $a_1 = a_2 = a_3$, a seconda del valore di λ.

(c) Rispondere nuovamente alla due domande precedenti, ma supponendo ora che si tratti di particelle di spin 1.

Supporre ora che la hamiltoniana sia data da

$$H_1 = H + \frac{\mu}{\hbar}\vec{B} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \tag{45}$$

dove H è data dalla Eq. (43) μ è una costante reale positiva e $\vec{B}$ è il vettore a componenti reali $\vec{B} = (B, 0, 0)$.

(d) Rispondere nuovamente alle prime due domande in questo caso.

(e) Determinare la probabilità che una misura dello spin della prima particella lungo l'asse z dia il risultato $s_1^z = \frac{1}{2}$, se il sistema si trova nello stato fondamentale (supponendo $\mu B \ll \lambda$).

(f) La misura del punto precedente viene effettuata al tempo $t = 0$. Determinare la probabilità che al tempo T una seconda misura di spin per la prima particella dia lo stesso risultato.

(24) *[Esame gennaio II, a.a. 2016–2017, domanda 6]*
Considerare un sistema di tre particelle di spin $\frac{1}{2}$ la cui hamiltoniana è data da

$$H_s = -\lambda \left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3\right), \tag{46}$$

dove λ è una costante reale positiva.

(a) Determinare lo spettro della hamiltoniana e la degenerazione di ciascuno stato.

(b) Determinare le funzioni d'onda dello stato fondamentale.

(25) *[Esame gennaio II, a.a. 2020–2021, domande 1-5, 8, 10]*
Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\kappa}{2I}(\vec{L})^2 + \hbar\vec{B} \cdot \vec{L}, \tag{47}$$

dove $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ sono gli operatori di momento angolare, I e κ sono costanti reali positive, e $\vec{B}$ è un vettore tridimensionale a componenti reali (non necessariamente positive).

(a) Determinare lo spettro e degenerazione dell'hamiltoniana prima nel caso in cui $\vec{B} = 0$, e quindi con $\vec{B} \neq 0$.

(b) Scrivere le equazioni di Heisenberg per l'operatore $\vec{L}$.

(c) Scrivere le equazioni di Heisenberg per gli operatori $\vec{x}$ e $\vec{p}$, ma supponendo ora $\kappa = 0$.

(d) Supporre ora che la hamiltoniana sia data da

$$H = H_0 + \hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{L}, \tag{48}$$

dove H_0 è la hamiltoniana Eq. (1) con $\vec{B} = 0$ e $\vec{\sigma}$ sono le matrici di Pauli. Determinare lo spettro della Hamiltoniana H e la sua degenerazione.

(e) Supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi in uno stato sovrapposizione equiprobabile del primo e del secondo livello eccitato della hamiltoniana H_0 (con $\vec{B} \neq 0$). Determinare la probabilità che al tempo t esso si trovi nella sovrapposizione degli stessi due stati ortogonale a quella in cui si trova al tempo $t = 0$.

(26) Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = H_1 + H_2 \tag{49}$$

$$H_1 = \hbar\omega a_1^\dagger a_1; \qquad H_2 = \hbar\omega a_2^\dagger a_2 \tag{50}$$

e gli a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \tag{51}$$

per ogni i, j, mentre

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}. \tag{52}$$

(a) Definire i tre operatori

$$j^a = \frac{\hbar}{2} \sum_{i,j=1}^{2} a_i^\dagger \sigma_{ij}^a a_j, \tag{53}$$

dove σ_{ij}^a è la a–esima matrice di Pauli di componenti i, j, e determinare le relazioni di commutazione $[j^a, j^b]$ fra qualunque coppia di questi operatori. Normalizzare le matrici di Pauli in modo che abbiano autovalori ± 1.

(b) Determinare quali degli operatori j^a possono essere diagonalizzati simultaneamente alla hamiltoniana H_0.

(c) Scrivere gli autostati della hamiltoniana H_0 nella base in cui sono diagonali H_1 e H_2 in termini degli autostati di H_1 e H_2. Dimostrare che in questa base è anche diagonale l'operatore j^3 e determinarne lo spettro.

(d) Definire

$$h_0 = \frac{H_0}{\hbar\omega} \tag{54}$$

e dimostrare l'identità

$$(j^1)^2 + (j^2)^2 + (j^3)^2 = \frac{h_0}{2}\left(\frac{h_0}{2} + 1\right) \tag{55}$$

e utilizzare il risultato per determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana data.

(e) Supporre ora che la hamiltoniana sia data da

$$H = H_0 + V, \tag{56}$$

dove

$$V = \hbar\lambda \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 \right). \tag{57}$$

Determinare lo spettro e la degenerazione (supponendo λ ed ω incommensurabili) della hamiltoniana H e interpretare il risultato in termini delle simmetrie del problema. Confrontare con il problema (5).

(f) Supporre che il sistema la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana H si trovi al tempo $t = 0$ nel primo stato eccitato della hamiltoniana H_0, ed inoltre che si trovi in un autostato di j_3 con autovalore $+\frac{\hbar}{2}$. Determinare la probabilità che al tempo t esso venga rivelato in un autostato di j_3 con autovalore $-\frac{\hbar}{2}$.

(g) Dimostrare che esiste un operatore hermitiano J tale che, definito $R(\theta) = \exp i\theta J$, si ha

$$A_i = R(\theta) a_i R^{-1}(\theta), \tag{58}$$

dove $a_i^\dagger$, a_i sono operatori di creazione e distruzione per la hamiltoniana H_0 mentre $A_i^\dagger$, A_i sono operatori di creazione e distruzione per la hamiltoniana H, e determinare J e θ. Notare che il risultato può essere ottenuto senza eseguire alcun calcolo.

(27) *[Esame luglio, a.a. 2022–2023, domande 1-2 e settembre, a.a. 2016-2017, domande 1-3,5,7]* Considerare una particella in tre dimensioni la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \vec{A}(\vec{x}) \right) \right]^2, \tag{59}$$

dove $\vec{\sigma}$ sono le matrici di Pauli, $\vec{x}$ e $\vec{p}$ sono gli operatori (vettoriali) posizione e impulso, e $\vec{A}(\vec{x})$ è un vettore di funzioni degli operatori posizione.

(a) Determinare, usando la rappresentazione di Heisenberg, $v^i \equiv \frac{d}{dt} x^i$.

(b) Dimostrare che la hamiltoniana può essere separata nella somma di una hamiltoniana spaziale $H_x = \frac{m}{2} v^i v^i$ e una hamiltoniana di spin $H_\sigma = -\frac{\hbar B}{2m} \sigma_3$, dove v^i sono gli operatori determinati al punto precedente.

Supporre ora che $A(\vec{x})$ sia data da

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{60}$$

con B una costante reale positiva.

(d) Determinare esplicitamente H_σ in questo caso.

(e) Determinare le equazioni del moto alla Heisenberg per gli operatori $\vec{x}$ e $\vec{p}$ e risolvere l'equazione del moto relativa alla terza coordinata x_3.

(f) Determinare lo spettro della hamiltoniana H_x, separando il moto lungo l'asse z.

(g) Dimostrare che gli operatori x_i', p_i'

$$p_1' = p_1 + \frac{B}{2} x_2 \tag{61}$$

$$p_2' = p_2 + \frac{B}{2} x_1 \tag{62}$$

$$p_3' = p_3 \tag{63}$$

$$\vec{x}' = \vec{x} \tag{64}$$

soddisfano relazioni di commutazione canoniche. Scrivere la hamiltoniana H_x in termini degli operatori $\vec{x}'$ e $\vec{p}'$, determinare direttamente lo spettro dell'hamiltoniana H'_x cosìottenuta.

(h) Dimostrare che è uguale a quello della hamiltoniana H di partenza.

(i) Dato un autostato dell'hamiltoniana H_x avente funzione d'onda $\langle \vec{x}|i\rangle = \psi_i(\vec{x})$, dimostrare che esiste una funzione $\Lambda(\vec{x}')$ tale che

$$\psi'_i(\vec{x}') = e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda(\vec{x}')}\psi_i(\vec{x}') \tag{65}$$

è un autostato della stessa hamiltoniana associato allo stesso autovalore di energia, ma scritto nella base canonica Eq. (3-6), e determinare esplicitamente la funzione $\Lambda(\vec{x})$.

[Esame settembre, a.a. 2024–2025, domande 1-5, 7, 9-11]

(28) Considerare un sistema di due particelle tridimensionali di ugual massa m la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = H_1 + H_2, \tag{66}$$

dove

$$H_1 = \frac{{p_1^x}^2 + {p_1^y}^2}{2m} + \frac{{p_2^x}^2 + {p_2^y}^2}{2m} + m\omega^2\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right] \tag{67}$$

$$H_2 = \frac{{p_1^z}^2}{2m} + \frac{{p_2^z}^2}{2m} + m{\omega'}^2\left[(z_1 - z_2)^2\right] + Ez_1 + Ez_2, \tag{68}$$

avendo indicato con p_i^x, p_i^y p_i^z e x_i y_i z_i le tre componenti spaziali degli operatori impulso e posizione delle due particelle, e con ω, ω' ed E costanti reali positive tutte incommensurabili.

(a) Attraverso un opportuno cambio di variabili, separare entrambe le hamiltoniane H_1 e H_2 Eq. (2-3) in una parte baricentrale ed una parte relativa:

$$H_i = H_i^r + H_i^b, \tag{69}$$

con $i = 1, 2$.

(b) Determinare la dipendenza temporale delle tre componenti degli operatori posizione ed impulso del baricentro in rappresentazione di Heisenberg.
Che forma ha il potenziale baricentrale?

(c) Determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana relativa totale

$$H^r = H_1^r + H_2^r. \tag{70}$$

Che forma ha il potenziale relativo?

(d) Scrivere la funzione d'onda di stato fondamentale per la hamiltoniana H^r.
Qual è lo stato fondamentale di un oscillatore armonico multidimensionale?

(e) Scrivere il più generale ket di stato $|\psi_1\rangle$ per un sistema che si trova nel primo stato eccitato della hamiltoniana H_1^r (ossia la parte relativa della hamiltoniana H_1), e determinare da quanti parametri osservabili indipendenti dipende.
Di quanti stati è sovrapposizione questo stato?

(f) Considerare l'operatore

$$O = \lambda \left(a_x^\dagger a_y + a_y^\dagger a_x \right), \tag{71}$$

dove

$$a_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x^r + i \frac{p_x^r}{m\omega} \right), \tag{72}$$

x^r e p_x^r sono rispettivamente le componenti lungo l'asse x degli operatori posizione e impulso relativo, e a_y è analogamente definito rimpiazzando x con y. Determinare i possibili risultati della misura di questo operatore per un sistema che si trova nello stato $|\psi_1\rangle$ determinato al punto (d), le loro probabilità in termini dei parametri da cui lo stato dipende, e lo stato in cui si trova il sistema dopo la misura a seconda del risultato.
Che forma ha l'operatore dato nel sottospazio ricoperto dagl;i stati di cui $|\psi_1\rangle$ è sovrapposizione?

(g) Determinare le relazioni di commutazione fra gli operatori

$$j_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} a_i^\dagger \sigma_{ij}^a a_j, \tag{73}$$

dove $a_1 = a_x$ e $a_2 = a_y$, e σ_{ij}^a è la a-esima matrice di Pauli di componenti ij, e utilizzare il risultato per determinare lo spettro dell'operatore $J^2 = j_1^2 + j_2^2 + j_3^2$.
Quanto valgono i commutatori degli operatori di creazione e distruzione, e delle matrici di Pauli?

(h) Dimostrare che gli operatori $A_\pm$, $A_\pm^\dagger$ definiti come

$$A^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_x \pm a_y \right) \tag{74}$$

soddisfano le stesse relazioni di commutazione degli operatori a_x, a_y, $a_x^\dagger$, $a_y^\dagger$.
Come si calcola il commutatore?

(i) Utilizzare il risultato della domanda precedente per determinare esattamente lo spettro della hamiltoniana

$$H = H_1^r + \epsilon O. \tag{75}$$

Che forma ha la hamiltoniana in termini degli operatori $A_\pm$?